034 (u_n) متتالية هندسية أساسها k و حدّها الأوّل $u_0=3$ بحيث $343u_8=64u_5$.

1) بيّن أنّ $k=\frac{4}{7}$ ثمّ أكتب u_n بدلالة n .

2) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ أحسب S_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

035

1) حدّد نهايات: $a_n=2^n\cdot3^{1-n}$ و $b_n=\frac{3^n+5^n}{3^n-2\cdot5^n}$ و $c_n=\frac{3n^2+n-5}{5+2n^2}$ و $d_n=\frac{(-1)^n}{n}$

2) نضع $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\le u_n\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

036 نعتبر المتتالية $u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}$.

بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{n^2}{n^2+n}\le u_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

037 نعتبر المتتالية (u_n) بحيث: $u_{n+1}=\frac{6u_n-2}{2u_n+1}$ و $u_0=1$.

1) أدرس رتابة الدالة $f(x)=\frac{6x-2}{2x+1}$ على المجال $I=[1,2]$ و حدّد $f(I)$.

2) بيّن أنّ: $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n<2$. **(فرض منزلي 2010 / 2011)**

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً بطريقتين مختلفتين.

4) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) أ) نعتبر المتتالية $v_n=\frac{u_n-2}{2u_n-1}$ ، بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثمّ u_n بدلالة n و أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

6) نفترض أنّ $u_0=0,5$ ، بيّن أنّ المتتالية في هذه الحالة ثابتة.

038 $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-n-\frac{3}{2}$ و $u_0=2$ و $v_n=u_n+2n-1$.

1) بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل. **(فرض منزلي 2008 / 2009)**

2) أكتب u_n بدلالة n .

3) لتكن $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}+v_n$ ، حدّد S_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

4) نضع $T_n=u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}+u_n$ ، حدّد T_n بدلالة n أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

039 لتكن $(u_n)_n$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{1}{2}(\frac{n+2}{n+1})^2\cdot u_n$ و $u_0=1$.

1) أحسب u_1 u_2 .

2) نضع: $v_n=\frac{u_n}{(n+1)^2}$ ، أ) بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل v_0 .

ب) أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=\frac{u_0}{1^2}+\frac{u_1}{2^2}+\frac{u_2}{3^2}...+\frac{u_n}{(n+1)^2}$. **(مكناس 2001/2000)**

040 نعتب: $U_0=2$ و $U_1=\frac{4}{9}$ و $U_{n+2}=\frac{1}{27}(12U_{n+1}-U_n)$ و $V_n=U_n-\frac{1}{3^n}$

1) برهن بالترجع أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:U_{n+1}=\frac{1}{9}U_n+\frac{2}{3^{n+2}}$. **(فرض منزلي 2009 / 2010)**

2) استنتج أنّ (V_n) هندسية محدّداً أساسها ثمّ أكتب U_n بدلالة n و حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

041 لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ بحيث: $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ و $u_0=1$ و $u_1=2$.

1) لتكن: $v_n=u_{n+1}-u_n$ بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية ثمّ أحسب $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

2) استنتج أنّ: $u_n=2(1-(\frac{1}{2})^n)+1$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. **(فاس 97/96 د س)**

042 نعتبر الدالة $f(x)=\frac{9x}{x^2+6}$ المعرّفة على المجال $I=[0,\sqrt{3}]$.

1) أدرس رتابة f على I ثمّ بيّن أنّ $f(I)\subset I$.

2) أ) نعتبر المتتالية: $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=1$. بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n\in I$.

ب) بيّن بالترجع أنّ (u_n) تزايدية ثم استنتج أنّها متقاربة محدّداً نهايتها.

043 نضع: $V_{n+1}=\frac{16}{8-V_n}$ و $V_0=3$ و $U_n=\frac{1}{V_n-4}$.

1) بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ V_n<4$ **ثمّ** أدرس رتابة المتتالية (V_n) .

2) بيّن أنّ المتتالية (U_n) حسابية أساسها $-0,25$. **(فرض محروس 2009 / 2010)**

3) أكتب V_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

044 كان يشتغل في يناير سنة 2005 في مقاولة كبيرة 2500 مستخدم. أثبتت دراسة أنّه في يناير من كلّ سنة يُحال على التّقاعد 10% من المستخدمين، و لتعويض الحاجيات من اليد العاملة، يتمّ تشغيل 120 من المستخدمين الجدد. نرمز ب u_n لعدد المستخدمين في يناير سنة $2005+n$.

1) أحسب u_1 و بيّن أنّ $u_{n+1}=0.9u_n+120$.

2) نضع $v_n=u_n-1200$ ، بيّن أنّ (v_n) هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأول.

3) أكتب v_n ثمّ u_n بدلالة n .

4) كم سيكون تقريباً عدد المستخدمين سنة 2015 ؟ بعد كم سنة سيقلّ عددهم عن 1360 ؟

045

1) نعتبر الدالة $f(x)=x(\sqrt{x}-2)^2$. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$.

2) بيّن أنّ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}:\ f'(x)=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ و حدّد $f([0,1])$.

3) لتكن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=0,25$. بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in[0,1]$.

4) أدرس رتابة u_n و استنتج أنّها متقاربة محدّداً نهايتها.

046 لتكن (u_n) بحيث: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$.

1) بيّن أنّ $u_n>0$ لكلّ n من $\mathbb{N}$ ثمّ بيّن أنّ: $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

2) بيّن أنّ (u_n) تناقصية و أنّها متقاربة

3) بيّن بالترجع أنّ $u_n<(\frac{1}{7})^n$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*$ ثمّ حدّد نهاية المتتالية (u_n) .

047 اشترى شخص سيارة بثمن $u_0=150000Dh$ سنة 2003. نفترض أنّ قيمة هذه السيّارة تنخفض ب 10 % كلّ سنة من قيمتها في السّنة قبلها. نرمز ب u_n لقيمة السيّارة سنة $2003+n$.

1) أحسب u_1 و u_2 ثمّ أحسب u_n بدلالة u_{n-1} و استنتج u_n بدلالة n .

2) ابتداء من أيّ سنة ستصبح قيمة هذه السيّارة أقلّ من خُمُس ثمن شرائها سنة 2003.

بكالوريا وطنية 2011 د ع: نعتبر الدالة المعرفة على $[1,e]$ ب $h(x)=x-\ln x$

1) أ) أحسب $h'(x)$ و أدرس إشارتها على $[1,e]$ ثمّ بيّن أنّ h تزايدية على هذا المجال.

ب) ضع جدول تغيرات h على $[1,e]$ ثمّ بيّن أنّ $h([1,e])\subset[1,e]$.

2) أ) نعتبر المتتالية $u_0=e$ و $u_{n+1}=u_n-\ln u_n$ ، بين بالترجع أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $1\le u_n\le e$.

ب) بيّن أنّ (u_n) تناقصية و استنتج أنّها متقارية. ج) باستعمال ما سبق بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

بكالوريا وطنية 2011 د س: نعتبر المتتالية: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{u_n+6}$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) أ) بيّن بالترجع أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n>1$. ب) بيّن أنّ (u_n) تناقصية واستنتج أنّها متقاربة.

3) أ) نضع $v_n=\frac{u_n+4}{u_n-1}$ ، أحسب v_n-1 بدلالة u_n ثمّ استنتج أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n>1$.

ب) بيّن أنّ $u_n=\frac{v_n+4}{v_n-1}$. ج) بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{7}{2}$ ثمّ أحسب v_n بدلالة n .

د) استنتج u_n بدلالة n . هـ) أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

بكالوريا وطنية 2010 د ع: نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=2$ و $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}$.

1) بيّن بالترجع أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>1$.

2) أ) بيّن أنّ لكلّ n **من** $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$ و استنتج أنّ (u_n) تناقصية.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) أنّها متقاربة.

3) نضع $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$ ، أحسب v_0 و بيّن أنّ (v_n) حسابية ثمّ أحسب v_n بدلالة n .

4) بيّن أنّ $u_n=\frac{v_n-2}{v_n-1}$ و استنتج أنّ $u_n=\frac{n+2}{n+1}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

بكالوريا وطنية 2010 د س: نعتبر المتتالية $u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n+\frac{1}{6}$ و $u_0=2$.

1) بيّن بالترجع أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n>1$. 2) بيّن أنّ (u_n) تناقصية و استنتج أنّها متقاربة.

3) بيّن أنّ المتتالية $v_n=u_n-1$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل.

4) استنتج أنّ $v_n=(\frac{5}{6})^n$ و أحسب u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

بكالوريا وطنية 2009 د ع: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية بحيث $u_1=100$ و أساسها $k=1{,}08$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية بحيث: $v_{n+1}=1{,}08\ v_n+8$ و $v_1=1$.

1) تحقّق أنّ $u_n=100\times(1{,}08)^{n-1}$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $w_n=v_n+100$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأول.

ب) استنتج أنّ $v_n=101\times(1{,}08)^{n-1}-100$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*$.

3) اقترح خبيرٌ على صاحب مصنع نوعين من آلات الإنتاج.

تنتج الآلة من النوع الأول u_n طن من منتوج معيّن إذا اشتغلت n ساعة.

تنتج الآلة من النوع الثاني v_n طن من منتوج معيّن إذا اشتغلت n ساعة.

علماً أنّ صاحب المصنع يريد تشغيل إحدى الآلات لمدّة 100 ساعة أسبوعياً، حدّد معلّلاً جوابك، أيّ نوع من الآلات سيكون أكثر إنتاجية.

بكالوريا وطنية 2009 د س: يعطي الجدول تغيرات الدالة $f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$ مع $x\neq-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$			1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$		0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$		1	$\nearrow$	$\frac{6}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

1) من خلال الجدول: أ) حدّد مطرافي الدالة f . ب) حدّد إشارة $f(x)$. ج) تحقّق أنّ $f([1\,,2])\subset[1\,,2]$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن بالترجع أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا: $1\le u_n$ و $u_n\le 2$.

ب) بيّن بالترجع أنّ (u_n) تناقصية و استنتج أنّها متقاربة ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

بكالوريا وطنية 2008 د ع: نعتبر $u_0=30$ و $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+20$ و $v_n=u_n-25$.

1) أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $0{,}2$ و حدّد حدّها الأوّل.

ب) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ $u_n=25+5(\frac{1}{5})^n$ و أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

2) نفترض أنّ u_n هو مبلغ تكلفة منتوج ما لشركة في السنة $2007+n$ بملايين الدراهم.

ابتداء من أيّة سنة سيكون مبلغ التكلفة أصغر قطعاً من $25{,}0016$ مليون درهم ؟

بكالوريا وطنية 2008 د س: نعتبر $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$ و $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$.

1) بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $1/6$ و حدّد v_0 ثمّ أحسب v_n بدلالة n

2) بيّن أنّ $u_n=\frac{4+v_n}{1-v_n}$ و استنتج أنّ $u_n=\frac{4(1-(\frac{1}{6})^n)}{1+4(\frac{1}{6})^n}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

بكالوريا وطنية محاسبة 2007 د ع: (u_n) حسابية أساسها $r=\ln(2)$ و حدّها الأوّل $u_0=1$.

1) أحسب u_1 و u_2 و أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.

2) أ) لتكن $v_n=e^{-u_n}$ ، بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدّد v_n بدلالة n .

ب) نضع $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، أحسب S'_n بدلالة n و استنتج $\lim_{n\to+\infty}S'_n$.

بكالوريا وطنية محاسبة 2007 د س:

1) لتكن $(v_n)_n$ متتالية هندسية حدّها الأول $v_0=1$ و أساسها $k=0{,}5$ ، أحسب v_n بدلالة n .

2) نضع $u_n=v_n-\frac{n}{2}$ و $S_n=u_0+...+u_{n-1}$ و $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

أحسب S'_n بدلالة n و بيّن أنّ $S_n=2[1-(\frac{1}{2})^n]-\frac{n(n-1)}{4}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

بكالوريا وطنية اقتصاد 2007 دع: نعتبر المتتاليتين: $u_n=2(\frac{1}{2})^{n-1}$ و $v_n=1-\frac{u_n}{n}$

1) أكتب v_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}v_n$.

2) نضع $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و $S'_n=v_1+2v_2+3v_3+...+nv_n$.

بيّن أنّ $S'_n+S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ و أحسب S_{10} واستنتج S'_{10} تعطى النتيجتان على شكل كسر

بكالوريا وطنية اقتصاد 2006 دع: نعتبر $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}$ و $u_0=2$ و $v_n=3u_n+1$

1) بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها q و حدّها الأوّل v_0 .

2) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ $u_n=\frac{1}{3}(7(\frac{1}{4})^n-1)$ و أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

أحسب S_n بدلالة n .و استنتج حساب $S_n'=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n'$

بكالوريا وطنية اقتصاد 2004 د ع: استثمر صيدلي في مشروع صيدلية مبلغاً مالياً قدره 100000 درهم و لاحظ أنّ ربحه الصّافي في الشهر الأوّل هو 5000 هم و أنّ ربحه الصّافي لكلّ شهر يزيد بنسبة 5% عن ربحه الصّافي للشّهر الذي يسبقه. u_1 الرّبح الصّافي في الشّهر الأوّل و u_n الربح الصّافي في الشّهر n

1) أحسب u_n بدلالة u_{n-1} ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

2) أحسب مجموع الأرباح الصّافية ل n شهراً الأولى.

3) إذا علمت أنّه يدّخر 30% من ربحه الصّافي، فبعد كم شهراً سيدّخر المبلغ المستثمر في الأول

بكالوريا وطنية 2004 د ع:

شغّل صاحب معمل عاملاً جديداً براتب سنوي قدره 24000 درهم في السّنة الأولى و اقترح عليه اختيار إحدى الصّيغتين التّاليتين للزّيادة السّنوية في هذا الرّاتب.

الصّيغة 1: زيادة سنوية ثابتة تقدّر ب 1300 درهم و الصّيغة 2: نسبة زيادة سنوية ب % 5.

u_n قيمة الرّاتب السّنوي للسّنة n وفق الصّيغة 1 و v_n قيمة الرّاتب للسنة n وفق الصّيغة 2.

1) أحسب u_2 و v_2 .

2) أكتب u_{n+1} بدلالة u_n ثمّ u_n بدلالة n ثمّ أكتب v_{n+1} بدلالة v_n ثمّ v_n بدلالة n .

3) أحسب المجموعين: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و $S'_n=v_1+v_2+...+v_n$.

4) إذا افترضنا أنّ مدّة العمل ستنتهي بعد 8 سنوات، فأيّ الصّيغتين أنسب بالنّسبة للعامل ؟

بكالوريا وطنية 2004 د س: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 و أساسها k .

1) حدّد k و u_0 إذا علمت أنّ: $u_1=\frac{40}{9}$ و $u_4=\frac{320}{243}$.

2) بيّن أنّ: $u_n=\frac{20}{3}(\frac{2}{3})^n$ ثمّ أحسب: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.

3) أ) حدّد أصغر قيمة p للعدد n بحيث: $u_n\le10^{-25}$.

ب) بيّن أنّ لكلّ n أكبر من أو يساوي p لدينا: $S_n\ge 20-3.10^{-25}$.

بكالوريا وطنية اقتصاد 2006 دع: (u_n) هندسية أساسها موجب و $u_0=2$ و $u_0+u_1+u_2=3{,}5$

1) بيّن أنّ الأساس: $r=0{,}5$.

2) أ) لتكن $v_n=\ln(u_n)$. أحسب v_0 ثمّ بينّ أنّ $(v_n)_n$ حسابية محدّداً أساسها.

ب) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، بيّن أنّ: $2S_n=n(-n+3)\ln2$.

ج) حدّد أصغر عدد صحيح طبيعي n يحقّق $S_n+9\ln2\le0$.