## التمرين الأول :

1. المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y''-6y'+9y=0 \quad : \quad (*)$ هي : $r^2-6r+9=0 \quad : \quad (E_c)$ .

ولدينا : $r^2-6r+9=0 \Leftrightarrow (r-3)^2=0 \Leftrightarrow r=3$ . ومنه نستنتج أن الحل العام للمعادلة التفاضلية $(*)$ هو :
$y_1=(\alpha x+\beta)e^{3x}$ حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ .

2. نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''-6y'+9y=2e^{3x} \quad : \quad (E)$ .

أ- لدينا 3 حل مزدوج للمعادلة المميزة $(E_c)$ . إذن نبحث عن حل خاص $y_0$ للمعادلة التفاضلية $(E)$ على شكل : $y_0=kx^2e^{3x}$ ، حيث $k\in\mathbb{R}$ . لدينا :

$$y_0'=\left(kx^2e^{3x}\right)'=2kxe^{3x}+3kx^2e^{3x}=(2+3x)kxe^{3x}$$

و

$$y_0''=\left[\left(2kx+3kx^2\right)e^{3x}\right]'=(2k+6kx)e^{3x}+3\left(2kx+3kx^2\right)e^{3x}=\left(2+6x+6x+9x^2\right)ke^{3x}$$

$$y_0''=\left(2+12x+9x^2\right)ke^{3x}$$

لدينا $y_0$ حل للمعادلة التفاضلية $(E)$ يكافئ على التوالي :

$$\begin{aligned} y_0''-6y_0'+9y_0=2e^{3x} &\Leftrightarrow \left(2+12x+9x^2\right)ke^{3x}-6(2+3x)kxe^{3x}+9kx^2e^{3x}=2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \left[2+12x+9x^2-12x-18x^2+9x^2\right]ke^{3x}=2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow 2ke^{3x}=2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow k=1 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $y_0=x^2e^{3x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $(E)$ .

ب- الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E)$ هو : $\boxed{y=y_0+y_1=x^2e^{3x}+(\alpha x+\beta)e^{3x}}$ ، حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ .

## التمرين الثاني :

نعتبر المعادلة التالية : $z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0 \quad ; \quad z\in\mathbb{C} \quad : \quad (E)$ .

نرمز ب $z_1$ و $z_2$ لحلي المعادلة $(E)$ بحيث : $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$ .

1. المميز المختصر للمعادلة $(E)$ هو : $\Delta'=\left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2-8i=3\times 2i-8i=-2i=(1-i)^2$ . إذن :

للمعادلة $(E)$ حلين عقديين هما : $z=\sqrt{3}(1+i)+1-i=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$

أو : $z=\sqrt{3}(1+i)-(1-i)=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

وبما أن: $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$ ، فإن : $\boxed{z_1=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}$ و $\boxed{z_2=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

2. أ- لدينا :

$$z_1^2=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2i\left(1+\sqrt{3}\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)-\left(-1+\sqrt{3}\right)^2$$

$$z_1^2=\left(4+2\sqrt{3}\right)+4i-\left(4-2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+4i=\boxed{4\left(\sqrt{3}+i\right)}$$

ولدينا :

$$i\overline{z_1}=i\left[\overline{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}\right]=i\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)=z$$

وبالتالي فإن : $\boxed{z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)}$ و $\boxed{z_2=i\overline{z_1}}$ .

ب- لدينا : $4\left(\sqrt{3}+i\right)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$.

ج- لدينا : $z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$ . إذن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{2}\right]$ حيث : $k=0$ أو $k=1$ .

أي: $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}+\pi\right]=-\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$ . وبما أن : $\Re e(z_1)>0$ ، فإن :

$$\boxed{z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]} .$$

ولدينا : $z_2=i\overline{z_1}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\overline{\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$ .

$$\boxed{z_2=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]} .$$

3. في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين : $A(z_1)$ و $B(z_2)$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \arg(z_2)-\arg(z_1) \quad [2\pi]\\
&\equiv \frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12} \quad [2\pi]\\
\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

ومنه فإن : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\;[2\pi]$ أي : $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\;[2\pi]}$ .

ولدينا : $\frac{OB}{OA}=\frac{|z_2|}{|z_1|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1\Rightarrow\boxed{OA=OB}$ . إذن : $OAB$ <u>مثلث متساوي الأضلاع</u>.

## ✍ التمرين الثالث : ✍

نعتبر ، في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقطة $A(1,-1,3)$ والمستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $x-y+3z=0$ .

1. أ- لدينا : $(OA)$ هو المستقيم المار من النقطة $O(0,0,0)$ والموجه بالمتجهة $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(OA) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ و } \overrightarrow{OA} \text{ مستقيميتين}\\
&\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \;/\; \overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OA}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=t\\ y=-t\\ z=3t\end{cases} \;/\; t\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

هذه النظمة هي <u>تمثيل بارامتري</u> للمستقيم $(OA)$ .

ب- لدينا : $(OA)\perp(\mathrm{Q})$. إذن : $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathrm{Q})$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$ . لدينا :

$\overrightarrow{AM}(x-1,y+1,z-3)$ و $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ . إذن :

$$M(x,y,z)\in(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA}=0$$
$$\Leftrightarrow 1\times(x-1)-1\times(y+1)+3\times(z-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+3z-11=0$$

وبالتالي فإن : $\boxed{(Q)\ :\ x-y+3z-11=0}$.

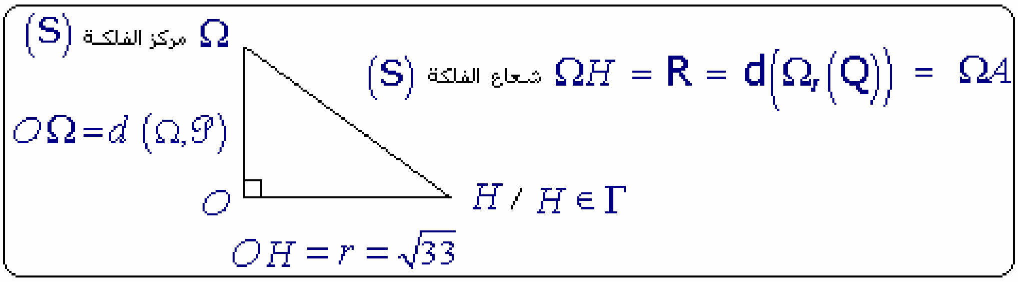
جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ متجهة منظمية على كل من المستويين $(\mathcal{P})$ و $(Q)$ . إذن : $\boxed{(\mathcal{P})//(Q)}$ .

2. نعتبر الفلكة $(S)$ المماسة للمستوى $(Q)$ في النقطة $A$ والتي يقطعها المستوى $(\mathcal{P})$ وفق الدائرة $\Gamma$ التي مركزها $O$ وشعاعها $r=\sqrt{33}$. ليكن $\Omega$ و $R$ على التوالي مركز وشعاع الفلكة $(S)$ .

أ- لدينا : $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على المستوى $(Q)$ و $(OA)\perp(Q)$ . إذن : $(OA)$ و $(A\Omega)$ منطبقان ، ومنه فإن : $\Omega(a,b,c)\in(OA)$ . و حسب السؤال ( 1 . أ- ) ، لدينا : $\begin{cases} t=a \\ \boxed{b=-a} \\ \boxed{c=3a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}$.

ب- الفلكة $(S)$ مماسة للمستوى $(Q)$ في النقطة $A$ . إذن : المسافة بين المركز $\Omega$ والمستوى $(Q)$ تساوي شعاع الفلكة $(S)$ . أي : $\boxed{\Omega A=d(\Omega,(Q))=R}$ .

المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق الدائرة $\Gamma$ التي مركزها $O$ وشعاعها $r=\sqrt{33}$. إذن :
$O$ هو المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على المستوى $(\mathcal{P})$ . ومنه فإن المثلث $\Omega OH$ قائم الزاوية في $O$ ،
حيث : $H$ نقطة من الدائرة $\Gamma$ . ولدينا : $d(\Omega,(\mathcal{P}))<R$ و $r^2=R^2-\left[d(\Omega,(\mathcal{P}))\right]^2$ .




ومنه فإن : $\sqrt{33}^2=\Omega A^2-\Omega O^2$ . أي : $\boxed{\Omega A^2-\Omega O^2=33}$ .

ولدينا: $\overrightarrow{\Omega O}(-a,-b,-c)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(1-a,-1-b,3-c)$ . إذن :

$$\Omega A^2-\Omega O^2 = (1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2-a^2-b^2-c^2$$
$$\Omega A^2-\Omega O^2 = 1-2a+\cancel{a}^2+1+2b+\cancel{b}^2+9-6c+\cancel{c}^2-\cancel{a}^2-\cancel{b}^2-\cancel{c}^2$$
$$\Omega A^2-\Omega O^2 = \boxed{11-2(a-b+3c)}$$

وعليه فإن : $11-2(a-b+3c)=33$ . وبالتالي فإن : $\boxed{a-b+3c=-11}$ .

جـ- نعلم أن : $b=-a$ و $c=3a$ و $\Omega(a,b,c)$ و $R=\Omega A$. إذن : $\Omega(a,-a,3a)$ و :
$\Omega A^2-\Omega O^2=11-2(a-b+3c)=11-2(a+a+9a)=11-22a$ و $\Omega A^2-\Omega O^2=33$ .

ومنه نستنتج أن : $11-22a=33$ . أي : $\boxed{a=-1}$ . وبالتالي فإن : $\boxed{\Omega(-1,1,-3)}$ .

ولدينا : $\overrightarrow{\Omega A}(2,-2,6)$ . إذن : $R=\Omega A=\sqrt{2^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$ . $\boxed{R=2\sqrt{11}}$ .

## المسألة :

-I نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(1+x)-x$ .

1. أ- ليكن $x\in[0,+\infty[$ . لدينا : $g'(x)=[\ln(1+x)-x]'=\frac{(1+x)'}{1+x}-1=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$ .

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[ \ : \ g'(x)=-\frac{x}{1+x}<0$ . ومنه فإن $g$ دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

ب- لدينا : $g$ دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$. إذن : $\forall x\in[0,+\infty[ \ : \ x\geq 0\Rightarrow g(x)\leq g(0)$

وبما أن : $g(0)=0$ ، فإن : $\boxed{\forall x\in[0,+\infty[ \ : \ g(x)\leq 0}$ .

2. . لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[ \ : \ g(x)<0$ لأن $g$ دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

و لدينا : $g(x)=\ln(1+x)-x$ . إذن : $\forall x\in]0,+\infty[ \ : \ g(x)<0$.

ومنه فإن : $\forall x\in]0,+\infty[ \ : \ \ln(1+x)<x$.

ليكن $x\in]0,+\infty[$ . لدينا : $\boxed{\ln(1+x)>0}$ $x>0\Rightarrow 1+x>1\Rightarrow$ . وبالتالي فإن :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[ \ : \ 0<\ln(1+x)<x}$$

-II نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ . وليكن $\mathscr{C}$

المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. تحديد $D$ حيز تعريف الدالة $f$ : لدينا : $D=\left\{x\in\mathbb{R} \ / \ \frac{x+1}{x-1}>0 \ \text{و} \ x-1\neq 0\right\}$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+1}{x-1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ |

إذن : $\boxed{D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$ .

2. أ- لدينا : $D$ مجموعة متماثلة بالنسبة للصفر . أي : $\boxed{\forall x\in D \ : \ -x\in D}$ .

ليكن $x\in D$ . لدينا : $f(-x)=-x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-x-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x)$ .

إذن : $f$ دالة فردية . <u>تذكر أن :</u> $\boxed{\forall a>0 \ ; \ \forall b>0 \ : \ \ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$ . إذن : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0$ . ومنه فإن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{+\infty}$$ .

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x+1}{x-1}=+\infty$ $\left('\frac{2}{0^+}'\right)$ إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{+\infty}$ .

3. أ- ليكن $x\in D$ . لدينا :

$$f'(x)=\left[x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'=1+\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}=1+\frac{\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=1-\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x^2-1-2}{x^2-1}=\boxed{\frac{x^2-3}{x^2-1}}$$

ب- لدينا : $f\left(\sqrt3\right)=\sqrt3+\ln\left(\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}\right)=\sqrt3+2\ln\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)$ و $f\left(-\sqrt3\right)=-\sqrt3-2\ln\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)$ .

نعطي جدول تغيرات الدالة $f$ على $D$ ( في السؤال ، نريد فقط جدول تغيرات الدالة $f$ على $]1,+\infty[$ ).

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt3$ | | $-1$ | | $1$ | | $\sqrt3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | ////// | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | | $+$ | | ////// | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | ////// | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f\left(-\sqrt3\right)$ | $\searrow$ | $-\infty$ | ////// | $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt3+2\ln\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

لدينا $f$ تزايدية قطعا على المجال $\left[\sqrt3,+\infty\right[$ وتناقصية قطعا على المجال $\left]1,\sqrt3\right]$ .

4. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{0}$ . إذن : المستقيم $\boxed{y=x}$ $(\Delta):$ مقارب مائل للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$ .

ب- لدينا : $\forall x\in D\;:\;\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$ . إذن : لكل $x\in D$ ، لدينا :

$$x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow\frac{2}{x-1}>0\Rightarrow1+\frac{2}{x-1}>1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$$

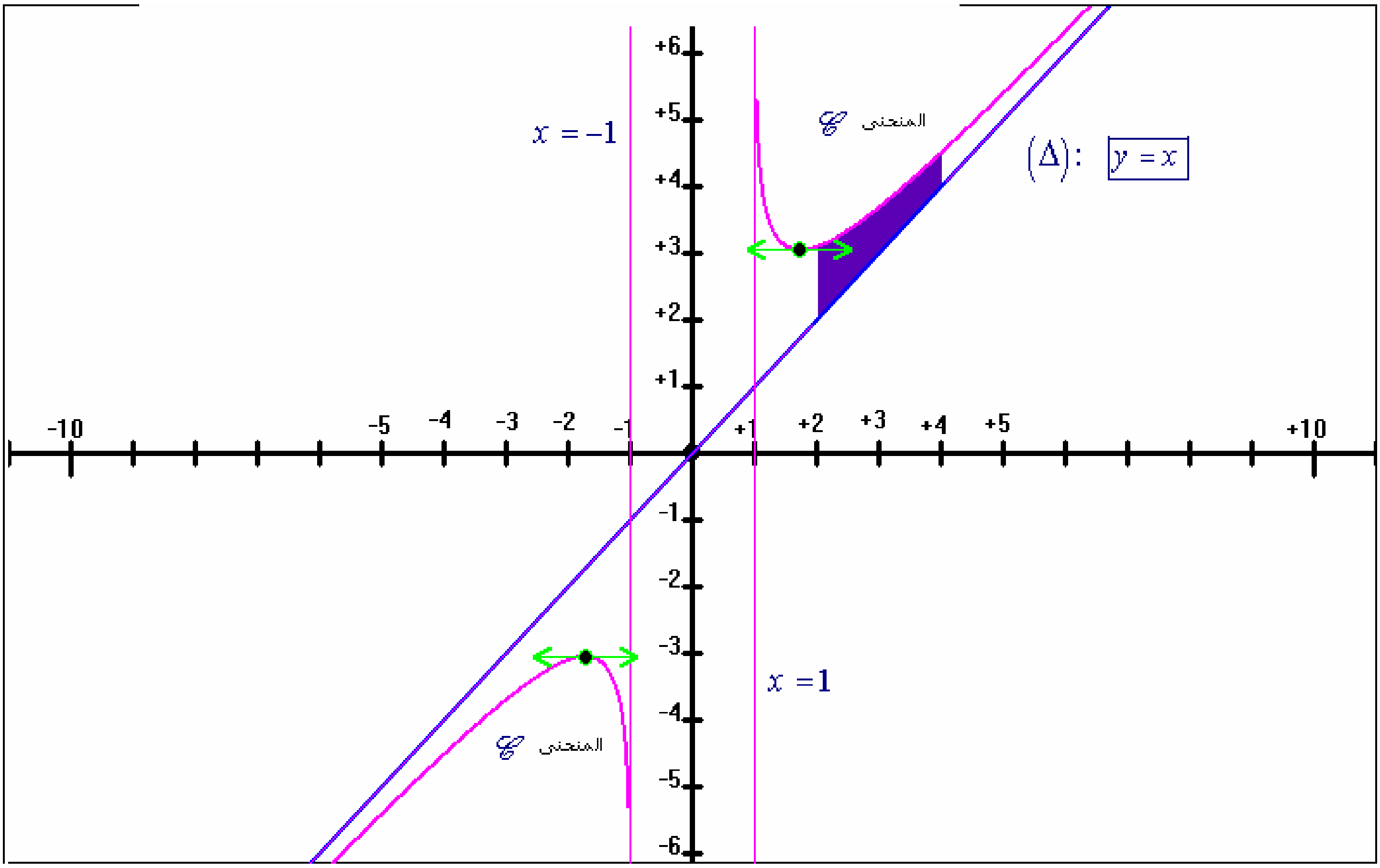
$$x<-1\Rightarrow x-1<-2\Rightarrow-1<\frac{2}{x-1}<0\Rightarrow0<1+\frac{2}{x-1}<1\Rightarrow0<\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$$

<u>خلاصة :</u> $\boxed{\forall x\in\left]1,+\infty\right[\;:\;\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0}$ و $\boxed{\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\;:\;\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0}$

جـ- حسب السؤال السابق ، لدينا : $\mathscr{C}$ يوجد **فوق** $(\Delta)$ على المجال $\left]1,+\infty\right[$ .

$\mathscr{C}$ يوجد **تحت** $(\Delta)$ على المجال $\left]-\infty,1\right[$ .

5. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$ : ( نعطي : $\sqrt3\approx1,7$ و $f\left(\sqrt3\right)\approx3$ )




6. أ- نضع : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \end{cases}$ . إذن : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]'=-\dfrac{2}{x^2-1} \end{cases}$ .

لدينا : $u$ و $v$ متصلتين على المجال $[2,4]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $]2,4[$ . حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx &= \int_2^4 u'(x)\times v(x)dx \\
&= \left[u(x)\times v(x)\right]_2^4-\int_2^4 u(x)\times v'(x)dx \\
&= \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4-\int_2^4-\frac{2x}{x^2-1}dx \\
&= 4\ln\left(\frac{5}{3}\right)-2\ln(3)+\int_2^4\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx \\
&= 4\ln(5)-4\ln(3)-2\ln(3)+\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^4 \\
&= 4\ln(5)-6\ln(3)+\ln(15)-\ln(3) \\
&= 4\ln(5)-7\ln(3)+\ln(5)+\ln(3) \\
\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx &= 5\ln(5)-6\ln(3)
\end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $\mathscr{C}$ والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي : $x=2$ و $x=4$ و $y=x$ هي :

$$A=\int_2^4|f(x)-x|dx=\int_2^4\left|\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right|dx=\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln(5)-6\ln(3)\quad(u.a.)$$

ولدينا : $(u.a.)=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=1cm^2$ . إذن : $A=5\ln(5)-6\ln(3)\approx1.4555158301618437246323252$

وبالتالي فإن : $\boxed{A\approx1.45cm^2}$ .

III- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq2}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ u_n=f(n)-n=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ .

1. أ- نعلم أن $\frac{n+1}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$ . إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$ .

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ . لدينا :

$$n\leq n+1\Rightarrow n-1\leq n\Rightarrow\frac{1}{n-1}\geq\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{2}{n-1}\geq\frac{2}{n}\Rightarrow1+\frac{2}{n-1}\geq1+\frac{2}{n}\Rightarrow\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\geq\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\Rightarrow u_n\geq u_{n+1}$$

إذن : $(u_n)_{n\geq2}$ **متتالية تناقصية** .

2. أ- نعلم أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ 0<\ln(1+x)<x$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ n\geq2\Rightarrow n-1>0\Rightarrow\boxed{\frac{2}{n-1}>0}$ .

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ 0<\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)<\frac{2}{n-1}$ .

ومنه فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ 0<u_n<\frac{2}{n-1}}$ .

ب- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ 0<u_n<\frac{2}{n-1}$ .

و : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}0=0$ .

إذن : حسب مصاديق التقارب ، $(u_n)_{n\geq2}$ متتالية متقاربة و لدينا : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$ .

**تذكير :**

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية و $N$ عدد طبيعي بحيث : $N\geq n_0$

إذا كان : $\forall n\geq N\ :\ u_n\leq v_n\leq w_n$ و $l\in\mathbb{R}$ ، بحيث : $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim_{n\to+\infty}w_n=l$

فإن : $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية متقاربة و لدينا : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=l}$