| ثانوية موسى بن نصير | فرض محروس رقم 03 | 2 باك علوم رياضية |
|---|---|---|
| نيابة الخميسات | الدورة الثانية 2012/2011 | ذ : عبدالله بن لختير |

⇦ الاسم العائلي و الشخصي : .................................... النقطة : ........

## ■ التمرين رقم 01: (03pts)

### ⇦ الجزء الأول: (1,25pts)

1- بين أن 331 عدد أولي .

2- في نظمة العد العشري ، نعتبر العددالصحيح الطبيعي $a=\underbrace{\overline{99...9}}_{330\ fois}{}^{(10)}$ .

■ بين أن : $a+1=10^{330}$ ، ثم إستنتج أن $a$ يقبل القسمة على العدد 331 .

### ⇦ الجزء الثاني: (1,75pts)

1- بين أن : $3^{20}\equiv 1[4]$ .

2- بين أن : $\sum_{k=0}^{4}3^{4k}\equiv 0[5]$ ، ثم إستنتج أن : $3^{20}\equiv 1[25]$ .

3- بين أن : $3^{20}\equiv 1[100]$ ، ثم إستنتج رقمي وحدات و عشرات العدد $N=3^{2012}$ .

## ■ التمرين رقم 02: (3,5pts)

⇦ نعتبر المجموعة : $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2\neq 0\right\}$ .

ولكل $(a,b)$ و $(x,y)$ من $G$ ، نضع : $(a,b)*(x,y)=(ax+by,ay+bx)$ .

1- بين أن * قانون تركيب داخلي في $G$ .

2- بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية ( ينبغي تحديد مماثل كل عنصر $(a,b)$ من $G$ ) .

3- نضع : $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2=1\right\}$ ، بين أن $H$ زمرة جزئية من $(G,*)$ .

4- نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix} / (x,y)\in H\right\}$ .

أ- بين أن E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ .

ب- بين أن التطبيق $h$ الذي يربط كل زوج $(x,y)$ من $H$ بالمصفوفة $M(x,y)$ من E تشاكل تقابلي من $(H,*)$ نحو $(\mathrm{E},\times)$ .

ج- إستنتج بنية $(\mathrm{E},\times)$، ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M(x,y)$ من E .

## ■ التمرين رقم 03: (3,5pts)

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط : $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها هي : $z_A=-2i$ و $z_B=4$ و $z_C=-2+2i$ و $z_D=-2\sqrt{3}$ .

1- حدد طبيعة المثلث $ABC$ ، ثم أحسب كلا من $AD$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AD})}$ .

2- لتكن $E$ صورة $C$ بالدوران $r$ الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و لتكن $F$ صورة $C$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و نسبته $\sqrt{3}$ .

أ- أحسب $z_E$ و $z_F$ لحقي النقطتين $E$ و $F$ على التوالي .

ب- بين أن المثلث $BCE$ قائم الزاوية و متساوي الساقين في $C$ و أن المثلث $BEF$ متساوي الأضلاع .

3- نعتبر التطبيق $f$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن $E$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{4z+8i}{iz-4+4i}$ .

أ- بين أن لكل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن $A$ و $E$ ، لدينا :

$OM'\times EM=4.AM$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM'})}+\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{EM})}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

ب- حدد و أنشئ في المستوى العقدي (P) كل مجموعة مما يلي :

$(\mathrm{E}_1)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z'|=1\right\}$ و $(\mathrm{E}_2)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P})/z'\in\mathbb{R}^-\right\}$ .

## ■ التمرين رقم 04: (3,5pts)

⇦ لتكن $F$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$F(0)=\ln 2$ و $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ .

1- أ- بين أن : $(\forall t\ge 0);1-t\le e^{-t}\le 1$ .

ب- إستنتج أن : $(\forall t\ge 0);t-\frac{1}{2}t^2\le 1-e^{-t}\le t$ .

ج- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});-x\le F(x)-\ln 2\le\frac{3}{4}x^2-x$ ، ثم أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة $F$ على اليمين في الصفر .

2- أ- ليكن $x>0$ ، بين أن : $(\forall t\in[x,2x]);0\le\frac{e^{-t}}{t}\le\frac{e^{-t}}{x}$ .

ب- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});0\le F(x)\le\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ ، ثم أحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ .

3- أ- بين أن $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F'(x)=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$ .

ب- ضع جدول تغيرات الدالة $F$ ، ثم أرسم المنحنى $(C_F)$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

■ **التمرين رقم 05:** $(6;5pts)$

⇦ **الجزء الأول:** $(03pts)$

⇦ لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=3xe^{-x^2}-1$ .

1)- أحسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم اعط تأويليهما الهندسي .

2)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)=3(1-2x^2)e^{-x^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات $f$ .

3)- أدرس تقعر المنحنى $(C_f)$ و حدد نقطة إنعطافه .

4)- أكتب معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ .

5)- أرسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

6)- ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $S_n$ مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و المستقيمات : $x=n$ و $x=n+1$ و $y=-1$ .
عبر عن $S_n$ بدلالة $n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

⇦ **الجزء الثاني:** $(3;5pts)$

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $f_n$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+); f_n(x)=3x^ne^{-x^2}-1$ .

1)- ضع جدول تغيرات الدالة $f_n$ ( مبرزا نهايتها عند $+\infty$ ) .

2)- بين أن المعادلة : $(E_n): f_n(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}^+$ حلين إثنين $u_n$ و $v_n$ بحيث : $0<u_n<1$
و $v_n>\sqrt{\frac{n}{2}}$ .

3)- أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\ge2}$ معللا جوابك .

4)- أ- بين أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n-1$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_{n\ge2}$ .
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge2}$ متقاربة محددا تأطيرا لنهايتها .

5)- لتكن $g_n$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}); g_n(x)=-x^2+\ln 3+n\ln x$

أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}); f_n(x)=0 \Leftrightarrow g_n(x)=0$ .

ب- أثبت بالخلف أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$ .

إنتهى الموضوع .

⇦ **تمارين إضافية:**

■ **التمرين رقم 01:**

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث : $n=pq$ ، حيث $p$ و $q$ عددان صحيحان طبيعيان أوليان .

1)- ليكن $\bar{a}$ عنصرا من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}-\{\bar{0}\}$ .

▪ بين أن $\bar{a}$ يكون قاسما للصفر في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا و فقط إذا كان : $a\in(p\mathbb{Z})\cup(q\mathbb{Z})$ .

2)- حدد قواسم الصفر في $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ، حل في $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ، المعادلة : $(E): x^2-\bar{3}x+\bar{2}=\bar{0}$ .

■ **التمرين رقم 02:**

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$ .

1)- بين أن : $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$ .

2)- بين أن : $(\forall k\in\mathbb{N}^*); I_{k-1}+I_k=\frac{1}{k}$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*); u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

■ **التمرين رقم 03:**

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $f_n$ الدالة المعرفة على $[0;1]$ بما يلي :

$(\forall x\in[0;1]); f_n(x)=\int_0^x e^{nt^2}dt-\int_x^1 e^{-nt^2}dt$ .

1)- بين أن الدالة $f_n$ تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ .

2)- بين أن : $(\exists! c_n\in[0;1]); \int_0^{c_n} e^{nt^2}dt=\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt$ .

3)- حدد قيمة العدد $c_0$ .

4)- حدد رتابة المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

5)- أ- ليكن $r$ عنصرا من المجال $]0;1]$ ، بين أن : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^r e^{nt^2}dt=+\infty$ .

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}); \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt\le 1$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .