المـــادة : الرياضيات الأستاذ : أسويدي محمد	الدرس 6 : الحساب المثلثي	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية المؤسسة : ثانوية رحال المسكيني التأهيلية

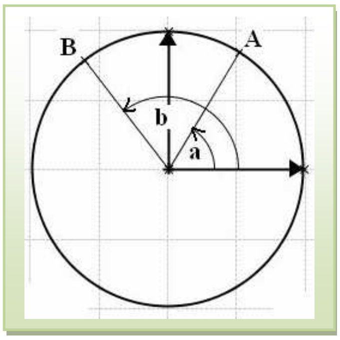
القدرات المنتظرة	➢ التمكن من مختلف صيغ التحويل ➢ التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية. ➢ التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية .
التوجيهات التربوية	✍ **ينبغي توخي البساطة في تقديم هذا الفصل وذلك باستعمال أي تقنية في متناول التلاميذ** ✍ **يتم توظيف الدائرة المثلثية لحل متراجحات مثلثية بسيطة على مجال من $\mathbb{R}$.**
أهداف الدرس	➢ **تعرف تحويل :** $\operatorname{Cos}(a \pm b)$ و $Sin(a \pm b)$ ➢ **التمكن من تحويل** $\operatorname{Cos}(2a)$ و $Sin(2a)$. ➢ **تعرف صيغ الإخطاط** ➢ **تعرف تحويل مجاميع إلى جداءات** ➢ **تحويل** $\tan(a \pm b)$ **ونتائجها** ➢ **التمكن من تحويل الصيغة :** $aCosx + bSinx$ ➢ **توظيف صيغ التحويل في : تبسيط تعابير مثلثية وحل معادلات ومتراجحات مثلثية** ➢ **تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية.**
المكتسبات القبلية	➢ التعرف على الدائرة المثلثية والأفاصيل المنحنية لنقطة ➢ تمثيل بعض النقط على الدائرة المثلثية بمعرفة أفاصيلها المنحنية ➢ التمييز بين الزوايا الهندسية و الزوايا الموجهة ومعرفة قياساتها ➢ التعرف وتوظيف العلاقات بين النسب المثلثية و تحديد إشارة النسب المثلثية ➢ حل المعادلات والمتراجحات المثلثية الأساسية وتمثيل حلولها على الدائرة المثلثية ➢ تثبيت ودعم خاصيات الزوايا المحيطية والرباعيات الدائرية في حل مسائل ➢ التعرف على علاقات الجيب في مثلث وتوظيفها
الامتدادات	➢ دراسة الدوال والدوال المثلثية على الخصوص ➢ حساب التكامل وحل المعادلات التفاضلية ➢ دراسة التذبذبات والحركات الجيبية في العلوم الفيزيائية. ➢ دراسة الكهرباء والإلكترونيك (علوم فيزيائية والتكنولوجيات الكهربائية) ➢ .....
فقرات الدرس	I) **صيغ التحويل** II) **نتائج صيغ التحويل** III) **تحويل المجموع إلى جداء .** IV) **تحويل جداء إلى مجموع .** V) **تحويل aCosx + bSinx .** VI) **معادلات ومتراجحات مثلثية**

I) صيغ التحويل

1) جيب وجيب تمام وظل a+b و a-b $(\tan(a\pm b)$ و $\cos(a\pm b)$ و $\sin(a\pm b))$

نشاط 9

جواب



1) لنبين أن $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (b-a)[2\pi]$.

لدينا : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA};\vec{i}) + (\vec{i};\overrightarrow{OB}) \equiv -a[2\pi] + b[2\pi] \equiv (b-a)[2\pi]$

i / تحويل $Cos(a-b)$

باستعمال الصيغة المثلثية للحساب المثلثي :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB Cos(b-a) = 1\times 1\times Cos(a-b) = Cos(a-b)$$

إذن $\boxed{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = Cos(a-b)}$ ①

3) لدينا : $\overrightarrow{OA}(Cosa;Sinb)$ و $\overrightarrow{OB}(Cosb;Sinb)$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = CosaCosb + SinaSinb}$ ②

من ① و ② نستنتج أن : $Cos(a-b) = Cos(a)Cos(b) + Sin(a)Sin(b)$

نتيجة 1

$$\forall a\in\mathbb{R} ; \forall b\in\mathbb{R} \quad Cos(a-b) = Cos(a)Cos(b) + Sin(a)Sin(b)$$ ①

تمرين 01

احسب مايلي : $Cos\frac{7\pi}{12}$; $Cos\frac{5\pi}{12}$; $Cos\frac{\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$)

ii / تحويل $Cos(a+b)$

➢ لدينا : $Cos(a+b) = Cos(a-(-b))$ ونعلم أن $Sin(-x) = -Sinx$ و $Cos(-x) = Cosx$

$$Cos(a+b) = Cos(a-(-b))$$

إذن
$$= Cos(a)Cos(-b) + Sin(a)Sin(-b)$$
$$= Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(-b)$$

أي $Cos(a+b) = Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b)$

نتيجة 2

$$\forall a\in\mathbb{R} ; \forall b\in\mathbb{R} : Cos(a+b) = Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b)$$ ②

تمرين 02

احسب مايلي : $Cos\frac{7\pi}{12}$; $Cos\frac{5\pi}{12}$; $Cos\frac{11\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$)

iii / تحويل $Sin(a+b)$

➢ نعلم أن : $Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = Sinx$ و أن $Sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = Cosx$

إذن : $Sin(a+b) = Cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = Cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$

$$Sin(a+b)=Cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$$

وبالتالي :
$$= Cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)Cosb+Sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)Sinb$$
$$=Sina\,Cosb+Cosa\,Sinb$$

أي :
$$Sin(a+b)=Sina\,Cosb+Cosa\,Sinb$$

نتيجة 3

③ $\forall a\in\mathbb{R};\forall b\in\mathbb{R}:Sin(a+b)=Sin(a)Cos(b)+Cos(a)Sin(b)$

تمرين 03

احسب مايلي : $Sin\frac{7\pi}{12}$; $Sin\frac{5\pi}{12}$; $Sin\frac{11\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$)

iv / تحويل $Sin(a-b)$

➢ نعلم أن : $Sin(-x)=Sinx$ و $Cos(-x)=Cosx$

$$Sin(a-b)=Sin(a+(-b))$$

إذن
$$=Sina.Cos(-b)+Cosa.Sin(-b)$$
$$=Sina.Cosb - Cosa.Sinb$$

نتيجة 4

④ $\forall a\in\mathbb{R};\forall b\in\mathbb{R}:Sin(a-b)=Sin(a)Cos(b)-Cos(a)Sin(b)$

تمرين 04

احسب مايلي : $Sin\frac{7\pi}{12}$; $Sin\frac{5\pi}{12}$; $Sin\frac{\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$) .

تمرين 05

1) ليكن $Sinx=1$. و $x\in\mathbb{R}$. أحسب : $Cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ و $Sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2) اختزل التعابير التالية : $Sin2x.Cos5x+Sin5x.Cos2x$ و $Cos3x.Cosx+Sinx.Sin3x$.

3) احسب : $Sin\frac{\pi}{12}.Cos\frac{5\pi}{12}+Sin\frac{\pi}{12}.Cos\frac{5\pi}{12}$ و $Cos\frac{\pi}{12}.Cos\frac{5\pi}{12}-Sin\frac{\pi}{12}.Sin\frac{5\pi}{12}$

4) ليكن x عددا حقيقيا .

أ / بين أن : $Cosx+Cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+Cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

ب / بين أن : $Sinx+Sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+Sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

v / تحويل $tan(a-b)$

نشاط 10

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

لدينا :

$$\tan(a-b)=\frac{Sin(a-b)}{Cos(a-b)}$$
$$=\frac{SinaCosb - SinbCosa}{CosaCosb+SinaSinb}$$
$$=\frac{\cancel{CosaCosb}\left(\frac{Sina}{Cosa}-\frac{Sinb}{Cosb}\right)}{\cancel{CosaCosb}\left(1+\frac{Sina}{Cosa}\times\frac{Sinb}{Cosb}\right)}$$
$$=\frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$

نتيجة 5

لكل عددين حقيقيين a و b بحيث: $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b} \quad ⑤$$

تمرين06

احسب مايلي : $\tan\frac{7\pi}{12}$; $\tan\frac{5\pi}{12}$; $\tan\frac{\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$)

vi / تحويل $\tan(a+b)$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

نعلم أن : $\tan(-x)=-\tan x$

إذن :

$$\tan(a+b)=\tan(a-(-b))$$
$$=\frac{\tan a-\tan(-b)}{1+\tan a\times\tan(-b)}$$
$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$$

نتيجة 6

لكل عددين حقيقيين a و b بحيث: $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b} \quad ⑥$$

تمرين 07

احسب مايلي : $\tan\frac{7\pi}{12}$;$\tan\frac{5\pi}{12}$;$\tan\frac{11\pi}{12}$ (لاحظ أن: $\frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$)

تمرين08

1) اختزل التعابير التالية :

$$A=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad B=\frac{1-\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{\pi}{24}}{tan\frac{\pi}{12}+\tan\frac{\pi}{24}}$$

2) حدد tanx إذا علمت أن : $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

3) إذا علمت أن : $\tan\alpha=\frac{3}{5}$ و $\tan\beta=\frac{-4}{3}$ احسب : $\tan(\alpha+\beta)$ و $\tan(\alpha-\beta)$.

II) نتائج صيغ التحويل .

النشاط 11

1 / حساب Cos2a

ليكن a عددا حقيقيا

$$\begin{aligned}Cos(2a)&=Cos(a+b)\\&=Cosa\times Cosa-Sina\times Sina\\&=Cos^2a-Sin^2a\end{aligned}$$

ونعلم أن $Cos^2a+Sin^2a=1$ إذن : $Cos^2a=1-Sin^2a$ و $Sin^2a=1-Cos^2a$

ومنه : $Cos^2a=Cos^2a-Sin^2a=1-Sin^2a=2Cos^2a-1$

نتيجة 7

⑦ $$\forall a\in\mathbb{R}:\quad \begin{aligned}Cos2a&=Cos^2a-Sin^2a\\&=1-Sin^2a\\&=2Cos^2a-1\end{aligned}$$

نتيجة 8

⑧ $$\forall a\in\mathbb{R}:\quad Cos^2a=\frac{1+Cos2a}{2}\qquad Sin^2a=\frac{1-Cos2a}{2}$$

تمرين09

1) احسب : $Cos\frac{\pi}{12}$; $Cos\frac{\pi}{8}$

2) احسب : $Cos2x$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$Sinx=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ Sinx=\frac{3}{4}\ ;\ Cosx=\frac{3}{5}\ ;\ Cosx=-\frac{1}{3}$$

2/ حساب Sin2a

ليكن a عددا حقيقيا .

لدينا :

$$\begin{aligned}Sin(2a)&=Sin(a+a)\\&=Sina\times Cosa+Sina\times Cosa\\&=2Sina\times Cosa\end{aligned}$$

نتيجة 9

⑨ $\forall a\in\mathbb{R}\quad Sin2a=2SinaCosa$

تمرين 10

1) احسب : $Sin\frac{\pi}{12}$; $Sin\frac{\pi}{8}$

2) 2) احسب : $Sin2x$ في كل حالة من الحالات التالية :

; $Sinx=\frac{3}{5}$ و $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $Cosx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x\in[\pi;2\pi]$; $Sinx=-\frac{4}{5}$ و $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

3 / حساب tan2a

ليكن a عددا حقيقيا بحيث : $2a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\tan(2a) &= \tan(a+a)\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\times\tan(a)}\\ &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\end{aligned}$$

نتيجة 10

$\forall a \in \mathbb{R} / 2a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$:

⑩ $$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

تمرين 11

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $\tan x = \sqrt{3}$ احسب $\tan 2x$ و $\tan\frac{x}{2}$ و $\frac{4\sqrt{3}}{11\tan 4x}$

4 / حساب Cosa و Sina و tana بدلالة $\tan\frac{a}{2}$

➢ لدينا :

$$\frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{1-\frac{Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}}{1+\frac{Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}} = \frac{\frac{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cancel{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}}}{\frac{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cancel{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}}} = Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-Sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = Cos\left(2\times\frac{a}{2}\right) = Cosa$$

نتيجة 11

$\forall a \in \mathbb{R} / 2a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$:

⑪ $$Cosa = \frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

➢ لدينا :

$$\frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2\frac{Sin\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos\left(\frac{a}{2}\right)}}{1+\frac{Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}} = \frac{2Sin\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos\left(\frac{a}{2}\right)}\times\frac{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}{Cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+Sin^2\left(\frac{a}{2}\right)} = 2Sin\left(\frac{a}{2}\right)Cos\left(\frac{a}{2}\right) = Sin\left(2\times\frac{a}{2}\right) = Sina$$

نتيجة 12

$$\forall a \in \mathbb{R} / 2a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } k \in \mathbb{Z}:$$

⑫ $$Sina = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

➢ لدينا

$$\tan(a) = \frac{Sina}{Cosa} = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \times \frac{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

نتيجة 13

$$\forall a \in \mathbb{R} / 2a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } k \in \mathbb{Z}:$$

⑬ $$\tan a = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

ملاحظة

بوضع $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$ بحيث : $x \neq \pi + 2k\pi$ و $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$.

لدينا : $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ و $Cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $Sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ (تظهر أهميتها في حساب التكامل)

تمرين 12

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $\tan 4x = 5$. أحسب $Cos8x$ و $\tan8x$ و $Sin8x$

III) تحويل جداءات إلى مجاميع .

النشاط 13 . / 1 /

ليكن a و b عددان حقيقيان .

➢ لدينا :

$$Cos(a+b) = Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b)$$

و $$Cos(a-b) = Cos(a)Cos(b) + Sin(a)Sin(b)$$

إذن :

$$Cos(a+b) + Cos(a-b) = 2Cos(a)Cos(b)$$

و $$Cos(a+b) - Cos(a-b) = -2Sin(a)Sin(b)$$

نتيجة 14

لكل عددين حقيقيين a و b لدينا :

(14) $$Cos(a)Cos(b) = \frac{1}{2}\left[Cos(a+b) + Cos(a-b)\right]$$

و **(15)** $$Sin(a)Sin(b) = \frac{-1}{2}\left[Cos(a+b) - Cos(a-b)\right]$$

➤ لدينا :

$$Sin(a+b)=Sin(a)Cos(b)+Cos(a)Sin(b)$$
$$Sin(a-b)=Sin(a)Cos(b)-Cos(a)Sin(b)$$

إذن :

$$Sin(a+b)+Sin(a-b)=2Sin(a)Cos(b)$$
$$Sin(a+b)-Sin(a-b)=2Cos(a)Sin(b)$$

نتيجة 15

لكل عددين حقيقيين a و b لدينا :

$$(16)\quad Sin(a)Cos(b)=\frac{1}{2}\left[Sin(a+b)+Sin(a-b)\right]$$

و

$$(17)\quad Cos(a)Sin(b)=\frac{1}{2}\left[Sin(a+b)-Sin(a-b)\right]$$

تمرين 13

1) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});Cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)Cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=Cos^2(x)-\frac{3}{4}$

2) اكتب على شكل مجموع التعابير التالية :

$g(x)=Sin(3x)Sinx\,Sin(5x)$ و $f(x)=Cosx.Cos(3x).Cos(5x)$

IV) تحويل مجموع إلى جداء

نشاط 13 /2/

نضع $p=a+b$ و $q=a-b$

أ / لنبين أن : $a=\frac{p+q}{2}$ و $b=\frac{p-q}{2}$

لدينا $p=a+b$ و $q=a-b$ إذن $q+p=2a$ و $p-q=2b$. و منه : $a=\frac{p+q}{2}$ و $b=\frac{p-q}{2}$

➤ لدينا :

$$Cos(a)Cos(b)=\frac{1}{2}\left[Cos(a+b)+Cos(a-b)\right]$$

و

$$Sin(a)Sin(b)=\frac{-1}{2}\left[Cos(a+b)-Cos(a-b)\right]$$

إذن :

$$Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[Cos(p)+Cos(q)\right]$$

و

$$Sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{-1}{2}\left[Cos(p)-Cos(q)\right]$$

نتيجة 16

لكل عددين حقيقيين p و q :

$$(18)\quad Cos(p)+Cos(q)=2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

و

$$(19)\quad Cos(p)-Cos(q)=-2Sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

➤ لدينا :

$$2Sina.Cosb=Sin(a+b)+Sin(a-b)$$
$$2Cosa.Sinb=Sin(a+b)-Sin(a-b)$$

إذن :

$$2Sin\left(\frac{p+q}{2}\right).Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)=Sin(p)+Sin(q)$$
$$2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right).Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=Sin(p)-Sin(q)$$

نتيجة 17

لكل عددين حقيقيين p و q :

$$(20)\quad Sin(p)+Sin(q)=2Sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

و

$$(21)\quad Sin(p)-Sin(q)=2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

تمرين 14

لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $A(x)=Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x$

1) a / اكتب على شكل جداء مايلي : $Sinx+Sin7x$ و $Sin3x+Sin5x$

b / أستنتج أن : $A(x)=4Cox.Cos2x.Sin4x$.

2) حل في المجال $[0;\pi]$ المعادلة $A(x)=0$.

V) تحويل $aCos(x)+bSin(x)$.

النشاط 14

1/ نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم : $(O;\vec{i};\vec{j})$. نضع $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى الدائرة (ζ) ذات المركز O والشعاع r . ونعلم أن الدائرة (ζ) لها تمثيلا بارامتريا هو :

$(\theta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=rCos\theta\\ y=rSin\theta\end{cases}$. بما أن : $M(a;b)\in(\zeta)$ فإنه يوجد α من $\mathbb{R}$ بحيث : $\begin{cases}a=rCos\alpha\\ b=rSin\alpha\end{cases}$

أي : $Sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $Cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(*)$

2 / ≺ لدينا : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}Cosx+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Sinx\right)$

وحسب نتيجة العلاقة (*) فإن: $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}(Cos\alpha Cosx+Sin\alpha Sinx)$

ومنه $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}Cos(x-\alpha)$

خاصية :

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين . يوجد زوج $(r;\alpha)$ من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بحيث :

$a=rCos\alpha$ و $b=rSin\alpha$ و $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و لدينا : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}.Cos(x-\alpha)$

أمثلة :

$$\begin{aligned}Cosx-Sinx&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Cosx-\frac{1}{\sqrt{2}}Sinx\right)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Cosx-\frac{\sqrt{2}}{2}Sinx\right)\\&=\sqrt{2}\left(Cos\frac{\pi}{4}Cosx-Sin\frac{\pi}{4}Sinx\right)\\&=\sqrt{2}Cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cos(2x)-\sqrt{3}Sin(2x)&=2\left(\frac{1}{2}Cos(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}Sin(2x)\right)\\&=2\left(Cos\frac{\pi}{3}Cos(2x)+Sin\frac{\pi}{3}Sin(2x)\right)\\&=2Cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

ملاحظة :

يمكن ملاحظة أن : $\left|\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le1$ و $\left|\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le1$ و $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ إذن يوجد α من $\mathbb{R}$

بحيث $Sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $Cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

أو يوجد β من $\mathbb{R}$ بحيث $Sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $Cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

وفي هذه الحالة يكون لدينا : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(Sin\beta Cosx+Cos\beta Sinx\right)$

أي : $aCosx+bSinx=rSin\left(x+\beta\right)$ حيث : $r=\sqrt{a^2+b^2}$

VI) معادلات ومتراجحات مثلثية

1) حل المعادلة aCosx + bSinx = c

خاصية

لحل المعادلة $\left(E\right):aCosx+bSinx=c$ **نتبع الخطوات التالية :**

- **إذا كان** $abc=0$ **(أي أحد الأعداد** a أو b أو c **يساوي 0) فإن المعادلة** $\left(E\right)$ **تكافئ إحدى المعادلات الأساسية :** $Cosx=\alpha$ أو $Sinx=\beta$ أو $\tan x=\gamma$ **وهذه معادلات نعرف طريقة حلها .**
- **إذا كان** $abc\neq 0$ **(أي الأعداد** a و b و c **تخالف 0) فإن المعادلة** $\left(E\right)$ **تكافئ** $rCos\left(x-\alpha\right)=c$ أي $Cos\left(x-\alpha\right)=\frac{c}{r}$ **وهي معادلة أساسية نعرف حلها . (أو** $rSin\left(x+\beta\right)=c$ أي $Sin\left(x+\beta\right)=\frac{c}{r}$ **)**

أمثلة :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $\left(E_1\right):Cos\left(2x\right)-\sqrt{3}Sin\left(2x\right)=1$ و $\left(E_2\right):Cos\left(x\right)-Sin\left(x\right)=-1$

$\left(E_3\right):\sqrt{3}Cos\left(x\right)+Sin\left(x\right)=\sqrt{3}$

الحل

$$\left(E_3\right)\Leftrightarrow 2Cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow Cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow Cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=Cos\frac{\pi}{6}$$

إذن : $S=\left\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k'\pi/k'\in\mathbb{Z}\right\}$