



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

٤٧٨٨٤٤ | ٤٥٤٠٤٩
٢٣٠٤ | ٤٤٠٤٤
٦٣٠٤ | ٤٤٠٤٤
٨٠٤١٣ | ٤٤٠٤٤



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكنولوجيا والتكوين المهني

المركز الوطني للتفوييم
والامتحانات والتوجيه

| | | | | |
|---|-------------|---------------|--------------------------------|------------------|
| 4 | مدة الإنجاز | taalimona.com | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | الشعبة أو المسلك |

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(\times, +)$ حلقه واحدية وحدتها جسم تبادلي.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E = \{M(x,y) ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ و $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ لكل (x,y) من \mathbb{R}^2 نضع:

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(+, \times)$

2- تحقق أن:

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2) : M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $\{z = x + iy \mid \text{يربط العدد العقدي } z \text{ بالمصفوفة } E^* = E - \{M(0,0)\} \text{ الذي}\}$ ونعتبر التطبيق: $\mathbb{C}^* \mapsto E^*$

\mathbb{R}^2 من E , حيث الزوج (x,y) من

(أ) بين أن φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو

ب) استنتاج أن (E^*, \times) زمرة تبادلية وأن عنصرها المحايد هو $(1,0)$

4- بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) أحسب $A \times M(x,y)$ من أجل $M(x,y)$ عنصر من E

ب) استنتاج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: لتكن (a,b) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $[173] a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$)

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a+b$

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

(أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $[173] a^{172} \equiv b^{172}$

ب) بين أن: $[173] a^{171}(a+b) \equiv 0$

ج) استنتاج أن 173 يقسم $a+b$

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية:

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حل للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث

$$k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1 \quad 0.25$$

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة . 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعمد و منظم و موجه (O, \bar{u}, \bar{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى وغير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة: $z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$

$$1- أ) بين أن: \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1 \quad 0.5$$

ب) استنتج أن النقطة M تتنمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $\bar{z}_2 = z_1$ فإن M تتنمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $[0, \pi]$ 0.5

أ) احسب z_2 بدلالة α و z_1 0.5

ب) استنتاج أن النقطة M تتنمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $[0, \pi]$ 0.5

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0 \quad \text{نفترض أن } z_1 \text{ و } z_2 \text{ هما حللا المعادلة:} \quad 0.5$$

$$\theta \text{ بدون حساب } z_1 \text{ و } z_2 \text{ تتحقق أن: } z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \quad 0.5$$

ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ . 0.5

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي

$$e^\theta = \frac{x}{1-e^{-x}} \quad \theta \text{ محصور بين } 0 \text{ و } x \text{ بحيث:} \quad 0.5$$

2- استنتاج أن:

$$(a) (\forall x > 0) ; 1-x < e^{-x} \quad 0.25$$

$$(b) (\forall x > 0) ; x+1 < e^x \quad 0.25$$

$$(c) (\forall x > 0) ; 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x \quad 0.25$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي: إذا كان $x > 0$

ولتكن (C) المنحني الممثّل للدالة f في المستوى المرتّب إلى معلم متّعّد منظم (j, \bar{i}, \bar{j}) .

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانا النتيجة المحصل عليها.

2- أ) بين أن: $(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$ (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-أ) من الجزء الأول)

ب) استنتج أن: $(\forall x \geq 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

3- أ) تحقق أن: $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$

ب) استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها.

4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتغال على المجال $[0, +\infty]$ وأن $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ب) من الجزء الأول)

ب) استنتاج أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0, +\infty]$. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ب) من الجزء الأول)

الجزء الثالث:

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$

2- بين أن المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناسبية قطعا ثم استنتاج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ج) من الجزء الأول)

3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I = [0, +\infty]$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

1- أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتغال على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I .

ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I

2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير وذلك بوضع: $u = \sqrt{e^x - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

انتهى