التمرين 1

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I=]-2;+\infty[$ بما يلي

$$g(x)=(x+1)-(2+x)\ln(2+x)$$

بين أن $\forall x\in I-\{-1\}\ : g(x)<0$

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال I بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(2+x)}{x+1}, x\neq -1 \\ f(-1)=1 \end{cases}$$

وليكن C_f منحناها في م .م.م

1) بين أن f متصلة في العدد -1

2) لكل عدد a من $I-\{-1\}$ نعتبر الدالة h_a المعرفة على المجموعة $I-\{-1\}$ بما يلي

$$h_a(x)=(\ln(2+a)-(a+1))(x+1)^2-(\ln(2+x)-(x+1))(a+1)^2$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c محصور بين -1 و a بحيث

$$\frac{\ln(2+a)-(a+1)}{(a+1)^2}=\frac{-1}{2(2+b)}$$

3)استنتج أن f قابلة للإشتقاق في -1 وأن

$$f'(-1)=\frac{-1}{2}$$

4)بين أن f قابلة للإشتقاق على I وأن

$$\forall x\in I-\{-1\}\ : f'(x)=\frac{g(x)}{(2+x)(x+1)^2}$$

5)استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

6) أحسب نهايات f عند محدات المحال I وأول هندسيا النتائج المحصل عليها.

7) أرسم C_f

التمرين 2

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}} \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

① (أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 .

(ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

(ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

② (أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(ب) بين أن : $(\forall t\geq 0\ );\ 0\leq e^{-t}+t-1\leq\dfrac{t^2}{2}$

(ج) بين أن : $(\forall x>0\ );\ \dfrac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x}$

(د) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .

③ أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\dfrac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} \ ; \ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

① بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.

③ (أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x)=\dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

(ب) بين أن : $(\forall x>0),(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f_{n+1}(x)-\dfrac{2}{n+1}>f_n(x)-\dfrac{2}{n}$

(ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $a=\lim\limits_{\infty} a_n$

(د) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ na_n=2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

(هـ) بين أن : $a=0$.