الامتحان التجريبي الثاني لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2017

9	المعامل	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات..(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية..................................(3.50 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية...................................(3.50 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..(5.25 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل...(4.75 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذين : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

التمرين الأول: (3 نقط)

ليكن a عدد صحيح طبيعي فردي بحيث : $1<a<2017$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $(E_a):\frac{(1-a)}{2}x+a^2y=1$.

1) -a بين أن المعادلة (E_a) تقبل حلول في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. — 0.50 ن

-b تحقق أن $(2(a+1);1)$ حلا للمعادلة، ثم حدد الحل العام للمعادلة (E_a) في $\mathbb{Z}^2$. — 0.75 ن

2) بين أن : $(\forall p\in\mathbb{N});\ a^{4032p}\equiv 1[2017]$. — 0.75 ن

3) نفترض أن الزوج $(x;a^{2n+2})$ حلا للمعادلة (E_a) بحيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\equiv 2014[2016]$.

-a بين أن 2017 و $(1-a)$ أوليان فيما بينهما. — 0.25 ن

-b بين أن : $x\equiv 0[2017]$. — 0.75 ن

التمرين الثاني : (3,5 نقط)

I- لكل عنصرين x و y من المجال $G=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نضع :

$$x\star y=Arc\tan\left(\sqrt{3}+\tan(x)+\tan(y)\right)$$

1) بين أن $(G,\star)$ زمرة تبادلية . — 0.75 ن

2) لكل x من المجال G، نضع : $f(x)=\sqrt{3}+\tan(x)$.

-a بين أن f تشاكل من $(G,\star)$ نحو $(\mathbb{R},+)$. — 0.25 ن

-b استنتج مرة أخرى بنية $(G,\star)$. — 0.25 ن

3) بين أن المجموعة $H=\left\{Arc\tan\left(\ln x-\sqrt{3}\right)/\,x>0\right\}$ زمرة جزئية من $(G,\star)$. — 0.75 ن

4) لكل x من المجال G، نضع : $x^{(n)}=\underbrace{x\star x\star\cdots\star x}_{n\ fois}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

-a حل في المجموعة G المعادلة : $x^{(2016)}=x+2017\pi$. — 0.25 ن

-b حدد تعبير $x^{(n)}$ بدلالة n و x. — 0.25 ن

II- نضع : $A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&-2\\0&1+\sqrt{2}&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\sqrt{2}&-2\\0&0&0\\-1&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

0.50 ن (1) تحقق أن : $B = A-\left(1+\sqrt{2}\right)I$ ، ثم أثبت أن : $A^2 = 2A+I$.

0.50 ن (2) بين أن B قاسم للصفر في الحلقة $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$.

التمرين الثالث: (3,5 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$\left(E_\theta\right): z^2-2\left(i+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)z+2i\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$ ، مع : $\theta \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$.

0.50 ن (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E_\theta\right)$.

0.50 ن (2) أكتب حلول المعادلة $\left(E_\theta\right)$ على الشكل الأسي.

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : i و $2i$ و $z_1 = i+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $z_2 = i+e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ ، مع $\theta \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$.

0.50 ن (1) بين أن النقطة M_2 صورة النقطة M_1 بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ ينبغي تحديد لحقها.

0.50 ن (2) a- حدد وأنشئ المجموعة : $\Gamma = \left\{M(z)\in(P);\ \arg\left(\frac{z-2i}{z}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$.

0.50 ن b- بين أنه عندما يتغير θ على المجال $\left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$ فإن النقطتان M_1 و M_2 تتغيران على المجموعة Γ.

c- نفترض أن $\theta \in I = \left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$ ولتكن G مركز ثقل المثلث AM_1M_2.

0.50 ن ✓ حدد مجموعة النقط G عندما يتغير θ على المجال I.

(3) لتكن N نقطة لحقها m، بحيث : $\theta \in I$ و $m \in \mathbb{C}-\{0,2i\}$.

0.50 ن ✓ حدد مجموعة النقط N بحيث تكون تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OBM_1.

التمرين الرابع: (5,25 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\ g_n(x)=n-x\ln(x) \text{ و } g_n(0)=n$$

وليكن $\left(C_{g_n}\right)$ المنحنى الممثل للدالة g_n في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و $\|\vec{i}\|=2\ cm$.

I- 1) a- بين أن الدالة g_n متصلة على اليمين في الصفر. 0.25 ن

b- أدرس قابلية اشتقاق الدالة g_n على اليمين في الصفر. 0.25 ن

c- أحسب $g_n'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0.25 ن

2) أدرس تغيرات الدالة g_n. 0.25 ن

3) أدرس الفرع اللانهائي عند $+\infty$. 0.25 ن

4) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_{g_1}) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي هي $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$. 0.50 ن

II- نضع $f=g_0$ وليكن n عدداً صحيحا طبيعيا بحيث $n\geq 3$.

1) بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{n}$ تقبل بالظبط حلين x_n و y_n بحيث : $0<x_n<\frac{1}{e}<y_n<1$. 0.50 ن

2) a- بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 3}$ متقاربة. 0.25 ن

b- بين أن $(\forall n\geq 3);\ x_n<\frac{1}{n}$، ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. 0.50 ن

3) a- بين أن $(\forall x>2);\ 2\ln x\leq x$، ثم استنتج أن $(\forall n\geq 3);\ \frac{1}{n^2}\leq x_n$. 0.50 ن

b- بين أن : $(\forall n\geq 3);\ \ln(x_n)\geq -\ln n-\ln(2)-\ln(\ln n)$. 0.50 ن

c- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(x_n)}{\ln n}=-1$. 0.25 ن

4) a- بين أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 3}$ متقاربة وأن $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=1$. 0.50 ن

b- بين أن : $(\forall n\geq 3)(\exists c_n\in]y_n,1[);\ \frac{y_n-1}{\ln(y_n)}=c_n$. 0.25 ن

c- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(y_n-1)=-1$. 0.25 ن

التمرين الخامس: (4,75 نقط)

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي :
$$\begin{cases} F(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{t-1}{\ln^2(t)}\,dt \\ F(1)=-\ln 2 \end{cases}$$

وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\|\vec{i}\|=1\ cm$.

1) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in]1,+\infty[\right);\ h(x)=\frac{x-1}{\ln x} \quad و \quad h(1)=1$$

0.25 ن a- بين أن h متصلة على المجال $[1,+\infty[$.

0.25 ن b- بين أنه لكل x من المجال $]1,+\infty[$ لدينا : $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt=\ln 2$.

0.50 ن c- باستعمال مكاملة بالاجزاء بين أن :

$$\left(\forall x\in]1,+\infty[\right);\ F(x)-F(1)=\frac{x(x-1)(x+2)}{2}h(x)-\int_x^{x^2}\frac{2t+1}{t}h(t)\,dt$$

0.25 ن d- استنتج أن F متصلة على اليمين في 1.

0.50 ن 2) a- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم حدد دالتها المشتقة الأولى F'.

0.50 ن b- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين بين أنه :

$$\left(\forall x\in]1,+\infty[\right)\left(\exists(\alpha;\beta)\in\left(]1,x[\right)^2\right)(\alpha>\beta);\ F(x)-F(1)=\frac{(1-x)(\alpha+2)}{2}\beta^2$$

0.50 ن c- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ثم حدد $F'_d(1)$.

0.25 ن 3) a- بين أن : $\left(\forall x\in]1,+\infty[\right)\left(\exists c_x\in\left[x,x^2\right]\right);\ F(x)=\left(x-x^2\right)\frac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$

0.50 ن b- استنتج أن : $\left(\forall x\in]1,+\infty[\right);\ F(x)\le -x\left(\frac{h(x)}{2}\right)^2$

0.50 ن c- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

0.25 ن 4) a- اعط جدول تغيرات الدالة F.

0.50 ن b- أنشئ المنحنى (C_F).

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺