Durée : 4 heures

Exercice 01 : (2,75 points)

⇨ Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers tels que :

$$p \leq q \text{ et } 10^{p+q-1} \equiv 1[pq] .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $p \wedge 10 = 1$.

0,5 **b)-** En déduire que : $10^{p-1} \equiv 1[p]$ et $10^{q} \equiv 1[p]$.

0,25 **2)- a)-** Montrer que : $(p-1) \wedge q = 1$.

0,75 **b)-** Prouver que : $p = 3$, puis en déduire que $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

0,75 **3)-** Décomposer $10^{3} - 1$ en facteurs premiers , puis prouver que : $q \in \{3, 37\}$.

Exercice 02 : (3,25 points)

I- On considère l'intervalle $I = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

Et pour tout $(x, y) \in I^{2}$, on pose : $x * y = x + y - 3xy$.

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $\left(\forall (x, y) \in I^{2}\right), 1 - 3(x * y) = (1-3x).(1-3y)$.

0,25 **b)-** En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur I .

1 **2)-** Démontrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif .

II- On considère l'intervalle $J =]0, +\infty[$.

Et pour tout $(x, y) \in J^{2}$, on pose : $xTy = \ln\left(\left(e^{x}-1\right).\left(e^{y}-1\right)+1\right)$.

0,25 **1)-** Vérifier que T est une loi de composition interne sur J .

2)- Pout tout $x \in I$, on pose : $f(x) = \ln(2-3x)$.

0,5 **a)-** Montrer que f est un isomorphisme de $(I, *)$ vers (J, T).

0,5 **b)-** En déduire la structure de (J, T) (en précisant son élément neutre et Le symétrique de tout $x \in J$) .

3)- On pose : $H = \left\{\ln\left(1+2^{-n}\right) / n \in \mathbb{Z}\right\}$.

0,5 ✓ Montrer que H est un sous-groupe de (J, T) .

Durée : 4 heures

Exercice 03 : (04 points)

✓ Les parties I et II sont indépendantes .

I- Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - \left[1+m(1+i)\right]z + im^2 + m = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} .$$

0,5 — **1)- a)-** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(1+(i-1)m\right)^2$.

0,25 — **b)-** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

0,75 — **2)- a)-** Déterminer la nature des ensembles suivant :

$$(D) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) / |1+im| = |m|\right\}$$

$$\text{Et } (\Gamma) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) / \arg(1+im) \equiv \arg(m)[\pi]\right\} .$$

0,5 — **b)-** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des points d'intersection de (D) et (Γ).

II- Dans le plan complexe (P), on considère les points $A(1)$ et $B(1+i)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, on pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

0,25 — **1)-** Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- Soient E et F les milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$.

0,5 — **a)-** Montrer que : $\frac{z_E}{z_E - z_F} = i$, puis en déduire que $(OE) \perp (EF)$.

0,5 — **b)-** Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en F .

3)- Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

$$M_0(i) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), M_{n+1} = R(M_n) .$$

0,25 — **a)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), aff(M_n) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n.\pi}{6}\right)}$.

0,25 — **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(F): 12x - 5y = 3$.

0,25 — **c)-** En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que : $M_n \in [Ox)$.

Durée : 4 heures

Exercice 04 : (5,5 points)

⇨ Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n} \text{ , où } n \in \mathbb{N}^*.$$

On désigne par (C_n) le graphe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75 **1)-** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$, puis en déduire la nature La branche infini de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,75 **2)- a)-** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = 0$ puis en déduire Que la courbe (C_n) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) que L'on déterminera .

0,25 **b)-** Etudier la position relative de (C_n) avec son asymptote oblique (Δ) .

0,75 **3)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f_n'(x) = \frac{n - e^{-x}}{n}$, puis dresser le tableau de variation De la fonction f_n en justifiant votre réponse .

0,75 **4)-** Construire la courbe (C_3) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(On donne : $\ln 3 \simeq 1{,}1$, $f_3(-1{,}5) \simeq 0$ et $f_3(-0{,}6) \simeq 0$) .

0,75 **5)- a)-** Montrer que si $n \geq 3$, alors l'équation : $(E): f_n(x) = 0$ admet exactement Deux solutions a_n et b_n tels que : $a_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq b_n < 0$.

0,5 **b)-** Calculer en justifiant votre réponse $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

0,25 **c)-** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n.b_n = 1$.

6)- Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = -1 \text{ et } (\forall x \in]0, +\infty[), g(x) = -1 - x\ln x .$$

0,25 **a)-** Montrer que g est continue à droite en 0 .

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall n \geq 3), g\left(\frac{-1}{a_n}\right) = \frac{\ln n}{a_n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{a_n}$.

Durée : 4 heures

Exercice 05 : (4,5 points)

⇨ Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right), F(x)=\int_x^{2x}\frac{\ln(t)}{2.t-1}dt \ .$$

0,75 — **1)-** Montrer que F est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et que : .

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right), F'(x)=\frac{(4x-2)\ln 2-\ln x}{(2x-1).(4x-1)} \ .$$

0,25 — **2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right),(4x-1).\ln 2-\ln x>0$.

0,25 — **b)-** En déduire la monotonie de F sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

0,5 — **3)- a)-** Soit $x\in]1,+\infty[$, montrer en utilisant le théorème des accroissement fini que

$$\left(\exists x \in]x,2x[\right), F(x)=\frac{x.\ln c}{2.c-1}.$$

0,5 — **b)-** En déduire que : $\left(\forall x \in]1,+\infty[\right), \frac{x\ln x}{4x-1}<F(x)<\frac{x\ln(2x)}{2x-1}$.

0,75 — **c)-** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement ces Deux résultats .

0,25 — **4)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right), \ln x \le x-1$.

0,75 — **b)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},1\right[\right), \int_1^x\frac{\ln(t)}{2.t-1}dt \ge \int_1^x\frac{t-1}{2.t-1}dt$, puis en déduire

La limite suivante $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\int_1^x\frac{\ln(t)}{2.t-1}dt$.

0,5 — **c)-** Montrer que : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}F(x)=-\infty$.

Fin Du Sujet .