التمرين 1: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q بحيث :

$$125u_7 = 8u_4$$

1. حدد قيمة الأساس q .
2. أ. حدد قيمة الحد الأول u_0 علما أن : $u_3 = \dfrac{4}{25}$.

ب. نعتبر المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)

بين أن : $S_n = \dfrac{25}{6}\left[1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right]$.

التمرين 2:

1. نضع : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

أ. أحسب : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2005}$.

ب. حدد بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

2. نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

حدد بدلالة n؛ المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

3. نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad w_n = 2n + 7\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

حدد بدلالة n؛ المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين 3: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$.

ب. استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 4: لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ونعتبر $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية العرفة ب: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad v_n = u_{n+1} - u_n$

1. أحسب v_1 و v_2 و v_3 .
2. حدد طبيعة المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq1}$.
3. أحسب v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 5: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 .
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية .

ب. أحسب v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 6 : لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ونعتبر $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية العرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = u_{n+1} - u_n$

1. أحسب u_2 و v_0 .
2. بين أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
3. أحسب ؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$
4. استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 7 : نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = u_n - 3$.

1. حدد طبيعة المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. حدد v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .
3. حدد؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

التمرين 8 : نعتبر $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n + 3 + 2nu_n}{3n + 3} \quad , \quad n > 1 \end{cases}$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad v_n = n(1 - u_n)$

1. أحسب u_2 و v_1 .
2. بين أن $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$.
3. أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .
4. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + 2u_2 + ... + nu_n$

التمرين 9 : لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العرفة ب: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

أ. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .

ب. استنتج v_n ثم u_n بدلالة n ..

2. نعتبر المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي :

. $\forall n \in \mathbb{N}: \ w_n = 2^{v_n}$

أ. بين أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول w_0 .

ب. أحسب ؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$.

التمرين 10 :
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 \le u_n < 1$.
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .
4. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب. حدد v_n ؛ ثم u_n بدلالة n .

ج. حدد بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \ldots + \sqrt[3]{u_n}$.

التمرين 11 :
لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{3u_{n-1} \times u_{n-2}}{u_{n-2} + 2u_{n-1}} \quad , \quad n \ge 2 \end{cases}$$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

1. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية محددا أساسها q وحدها الأول v_1
2. أحسب u_n بدلالة n .

التمرين 12 :
لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة مثنى مثنى وتحقق ما يلي :

i. a و b و c تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية حسابية .

ii. b و c و a تكون (بهذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية هندسية .

iii. $a+b+c = 18$.

أحسب مجموع الحدود الستة الأولى لكل من المتتاليتين .

التمرين 13 :
لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 5}{u_n - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$. حدد u_{n+2} بدلالة u_n .

ب. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية دورية محددا دورها .

2. ليكن $n \in \mathbb{N}$. أحسب u_{2n} و u_{2n+1} .
3. أحسب u_{2005} .

التمرين 14 : نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) بحيث :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

و $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad v_n = u_n - 3^n$

1. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
2. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .
3. أحسب بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

التمرين 14 :
لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث :

$0 < u_0 < 1$ بالعلاقة الترجعية: $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{u_n}}{2}$.

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < u_n < 1$.
2. أ. تحقق من أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(1+2\sqrt{u_n}\right)$$

ب. استنتج رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}: \ |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|u_n - 1|$

ب. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}: \ |u_n - 1| < \dfrac{1}{2^n}$

ج. استنتج : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

التمرين 15 :
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \quad , \quad n \ge 0 \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 \le u_n \le 1$.
2. أ. أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ب. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

3. ليكن $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. نضع : $u_0 = \cos(\theta)$.

أ. أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

ب. استنتج نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

بالتوفيق إنشاء الله