Prof : M.Idir	DEVOIR N°5 06 /02/2020	GROUPE EDUCATIF ALLAL AOUAD	
Matière :	Mathématiques	Coefficient :	9
Filière :	Sciences Mathématiques A et B	Durée :	4h

Bareme

Exercice 1 : (5 pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_α): $z^3+(3-\alpha^2)z+2i(1+\alpha^2)=0$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$

Partie 1 :

0,25 1- a) Vérifier que : $2i$ est une solution de l'équation (E_α).

075 b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E_α).

2- On suppose dans cette question que $\alpha=e^{i\theta}$ avec $\frac{5\pi}{2}<\theta<\frac{7\pi}{2}$. On pose $u=\alpha-i$ et $v=-\alpha-i$.

3- Déterminer en fonction de θ le module et un argument de chacun des nombres suivants :

1,5 u ,v et $\frac{u}{v}$.

Partie 2 :

On suppose que α un nombre complexe de module 2.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On considère les points : $A(2i),B(i),M(\alpha-i),N(-\alpha-i)$ et $I(\alpha)$.

0,5 1- a) Déterminer la distance MN .

0,5 b) Montrer que lorsque le point I varie sur le cercle $C(O,2)$, les points M , N appartiennent à un cercle qu'on déterminera .

0,5 2- a) Montrer que : $\frac{z_M-z_A}{z_N-z_A}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha=2i$ ou $\alpha=-2i$.

0,5 b) Montrer que le point O est le centre de gravité du triangle AMN .

0,5 c) Déterminer les valeurs de α pour que le triangle AMN soit isocèle de sommet A .

Exercice 2 : (5 pts)

Soit la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $F_n(x)=\int_0^1(1-t^2)^n\cos(xt)dt$.

On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_n=F_n(0)=\int_0^1(1-t^2)^n dt$.

0,5 1- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ $|F_n(x)|\leq 1$.

0,5 2- a) En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que : $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)$ $|\cos b-\cos a|\leq|b-a|$.

0,5 b) En déduire que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ $|F_n(x)-F_n(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$.

0,5 c) En déduire que F_n est continue en 0.

1 3- a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ $x^2F_{n+2}(x)=2(n+2)[(2n+3)F_{n+1}(x)-2(n+1)F_n(x)]$.

0,5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}I_n$.

0,75	c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
0,75	d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
	Problème :(11Pts)
	Soit la fonction f_n définie sur $]n,+\infty[$ par : $f_n(x) = (x-n)\ln x - x\ln(x-n)$. Et soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
	Partie 1 : Etude de la fonction f_2 $(n=2)$
	1- Soit g la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right) + \dfrac{4-4x}{x^2-2x}$.
0,75	a) Montrer que : $g'(x) = \dfrac{2x^2-4x+8}{\left(x^2-2x\right)^2}$ et donner le tableau de variations de g.
0,5	b) En déduire que : $\forall x \in]2,+\infty[: g(x) < 0$.
0,5	2- a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f_2(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty$.
0,5	b) Etudier la branche infinie de (C_2) au voisinage de $+\infty$.
0,75	3- a) Montrer que : $\forall x \in]2,+\infty[: f_2'(x) = g(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.
0,5	b) Ecrire l'équation de la tangente à (C_2) au point $x_0 = 4$.
0,75	c) Construire (C_2) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
	4- Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 4$.
0,75	a) Calculer $A(\lambda)$ la surface de la partie du plan délimitée par (C_2) et les droites d'équations : $x = 4$; $x = \lambda$ *et* $y = 0$.
0,5	b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.
	Partie 2 : Etude de la fonction f_n
0,25	1- a) Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f_n(x)$.
0, 5	b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x-n}\right)$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
0,5	2- a) Montrer que f_n est dérivable sur $]n,+\infty[$ et calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in]n,+\infty[$.
0,75	b) Montrer que f_n' est strictement croissante sur $]n,+\infty[$ et que: $(\forall x \in]n,+\infty[) : f_n'(x) < 0$.
0,5	c) Donner le tableau de variations de f_n.
	Partie 3 :
0,5	1- a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $]n,+\infty[$.
0,25	b) La suite $(\alpha_n)_n$ est-elle convergente ?
0 ,5	c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n - n)}{\alpha_n - n} = 0$.
0,5	2- a) Montrer que : $(\forall p \in \mathbb{N}) : si\ \ p \geq 5\ \ alors\ \ 2^p > p^2$.
0,5	b) Montrer que : $(\forall n \geq 3) :\ \ n+1 \leq \alpha_n \leq n+2$.

c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - n)$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.

0,75 **<u>Exercice Facultatif : (2pts)</u>**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $I_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)dt$.

1- Montrer que la fonction f admet une fonction primitive F sur $[a,b]$.

0,25 2- Montrer que F est bornée sur $[a,b]$. ($\exists M \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in [a,b]$ $|F(x)| \leq M$)

0,25 3- En utilisant une intégration par partie montrer que :

0,75 $I_n = \dfrac{f(b)\sin(nb)}{n} - \dfrac{f(a)\sin(na)}{n} - \dfrac{1}{n}\int_a^b F(x)\sin(nx)dt$.

4- a) En déduire que : $I_n \leq \dfrac{|f(a)| + |f(b)|}{n} + \dfrac{M(b-a)}{n}$.

0,5 b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

0,25