التمرين 1 :

1) نعتبر في à^2 المعادلة التالية : $\boxed{(x+1)^2 = 9+5y}$: (E) .

أ) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . لدينا:

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 = 9+5y \quad &\Rightarrow \quad (x+1)^2 \equiv 4 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2 - 4 \equiv 0 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2 - 4 \equiv 0 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad (x+1-2)(x+1+2) \equiv 0 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad (x-1)(x+3) \equiv 0 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad 5/(x-1) \quad \text{أو} \quad 5/(x+3) \\
&\Rightarrow \quad x \equiv 1 \quad [5] \quad \text{أو} \quad x \equiv -3 \quad [5] \\
&\Rightarrow \quad \boxed{x \equiv 1 \quad [5]} \quad \text{أو} \quad \boxed{x \equiv 2 \quad [5]}
\end{aligned}$$

ب) لنحل في à^2 المعادلة (E) :

نعلم أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) , فإن : $x \equiv 1 \quad [5]$ أو $x \equiv 2 \quad [5]$. إذن :

$$\begin{aligned}
x \equiv 1 \quad [5] \quad &\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad x = 1+5k \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad (2+5k)^2 = 9+5y \quad ;(x+1 = 2+5k) \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad 4+20k+25k^2 = 9+5y \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad 5y = -5+20k+25k^2 \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad \boxed{y = -1+4k+5k^2}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
x \equiv 2 \quad [5] \quad &\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad x = 2+5k \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad (3+5k)^2 = 9+5y \quad ;(x+1 = 3+5k) \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad 9+30k+25k^2 = 9+5y \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad 5y = 30k+25k^2 \\
&\Rightarrow \quad \exists k \in \text{à} : \quad \boxed{y = 6k+5k^2}
\end{aligned}$$

وبما أن الأزواج $(1+5k, -1+4k+5k^2)$ و $(2+5k, 6k+5k^2)$ حيث $k \in \text{à}$, فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{S = \{(1+5k, -1+4k+5k^2);(2+5k, 6k+5k^2) / k \in \text{à}\}}$$

2) ليكن $k \in \text{à}$, لدينا :

$$\begin{array}{r|l}
5k^2+4k-1 & 5k+1 \\
\hline
5k^2+k & k \\
\hline
3k-1 &
\end{array}$$

£ إذن : $5k^2+4k-1 = k(5k+1)+(3k-1)$.

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}
(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) &= ((5k^2+4k-1) - k(5k+1)) \wedge (5k+1) \\
&= (3k-1) \wedge (5k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3k-1)\wedge\big((5k+1)-(3k-1)\big)\\
&= (3k-1)\wedge(2k+2)\\
&= \big((3k-1)-(2k+2)\big)\wedge(2k+2)\\
&= (k-3)\wedge(2k+2)\\
&= (k-3)\wedge\big((2k+2)-2(k-3)\big)\\
(5k^2+k-1)\wedge(5k+1) &= (k-3)\wedge 8
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall k\in\mathbb{Z} :\quad (5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8}$

3) لنحل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية :

$$(*) : \begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x\wedge y = 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

لدينا :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1 = 5y+9 \\ x\wedge y = 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 9+5y \\ x\wedge y = 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(1+5k,-1+4k+5k^2) \quad ou \quad (x,y)=(2+5k,6k+5k^2)/k\in\mathbb{Z} \\ x\wedge y = 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2) \quad /k\in\mathbb{Z} \\ (1+5k)\wedge(-1+4k+5k^2)= 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2) \quad /k\in\mathbb{Z} \\ (k-3)\wedge 8= 8 \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2) \quad /k\in\mathbb{Z} \\ 8/(k-3) \\ x\equiv 1 \quad [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(1+5k,-1+4k+5k^2) \quad /k\in\mathbb{Z} \\ \exists h\in\mathbb{Z}/ \quad k=3+8h \end{cases}$$

وبما أن : $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow 1+5k\geq 0\Rightarrow k\geq -\frac{1}{5}\Rightarrow k\geq 0\Rightarrow 3+8h\geq 0\Rightarrow h\geq -\frac{3}{8}\Rightarrow h\geq 0\Rightarrow h\in\mathbb{N}$

فإن : $(*) \quad \Leftrightarrow (x,y)=\big(1+5(3+8h),-1+4(3+8h)+5(3+8h)^2\big) \quad /h\in\mathbb{N}$

$$(*) \quad \Leftrightarrow (x,y)=\left(16+40h,56+272h+320h^2\right) \quad /h\in\mathbb{N}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $(*)$ في ã^2 هي : $\boxed{S=\left\{\left(16+40h,56+272h+320h^2\right)/h\in\text{ã}\right\}}$

التمرين 2:

$$(C_m):\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{2-m}=1\quad;\quad m\in\text{ß}-\{2,10\}$$

I – 1) لدينا : $2-m>0\Leftrightarrow m<2$ و $10-m>0\Leftrightarrow m<10$.

إذا كان $\boxed{m<2}$, فإن : $2-m>0$. إذن : $(C_m):\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}=1$ ومنه فإن (C_m) إهليليج .

إذاكان $\boxed{2<m<10}$, فإن : $2-m<0$ و $10-m>0$: إذن : $(C_m):\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}=1$

ومنه فإن (C_m) هذلول .

إذاكان $\boxed{m>10}$, فإن : $10-m<0$ و $2-m<0$ إذن : $0>\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}=1$ (لا يمكن)

ومنه فإن : $(C_m)=\varnothing$.

2) إذا كان $\boxed{m<2}$ فإن : $(C_m):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ حيث : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{2-m}$ ($a>b$)

إذن (C_m) إهليليج : مركزه $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ؛ رؤوسه $A\begin{pmatrix}\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $A'\begin{pmatrix}-\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2-m}\end{pmatrix}$ و $B'\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2-m}\end{pmatrix}$

ولدينا $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{(10-m)-(2-m)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ؛ ومنه فإن بؤرتي (C_m) هما $F\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ و $F'\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

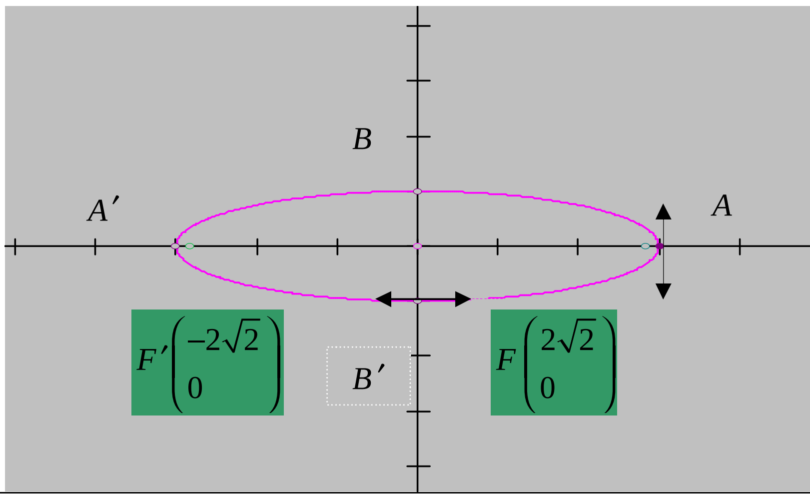
إذاكان $\boxed{2<m<10}$, فإن : $(C_m):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ حيث : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{m-2}$.

إذن (C_m) هذلول : مركزه $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ؛ رأسيه $A\begin{pmatrix}\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $A'\begin{pmatrix}-\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ ولدينا :

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(m-2)+(10-m)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, إذن بؤرتي (C_m) هما $F\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ و $F'\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ ومقاربيه :

$(D):y=\dfrac{b}{a}x\Leftrightarrow\boxed{y=\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}x}$ و $(D)':y=-\dfrac{b}{a}x\Leftrightarrow\boxed{y=-\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}x}$.

3) إنشاء الإهليليج (C_1) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$:



II - نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ z^2-(6\cos(\alpha))z+1+8\cos^2(\alpha)$ حيث : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1) المميز المختصر للمعادلة (E) هو :

$$\Delta'=(-3\cos(\alpha))^2-(1+8\cos^2(\alpha))=9\cos^2(\alpha)-1-8\cos^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-1=-\sin^2(\alpha)=\boxed{(i\sin(\alpha))^2}$$

إذن حلي المعادلة (E) هما : $z=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ أو $z=3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$.

وبما أن : $\left[\cos(\alpha)>0 \text{ و } \sin(\alpha)>0\right] \Leftarrow \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ni \alpha$ فإن : $\operatorname{Im}(z_1)>0\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\\ z_2=3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)\end{array}}$

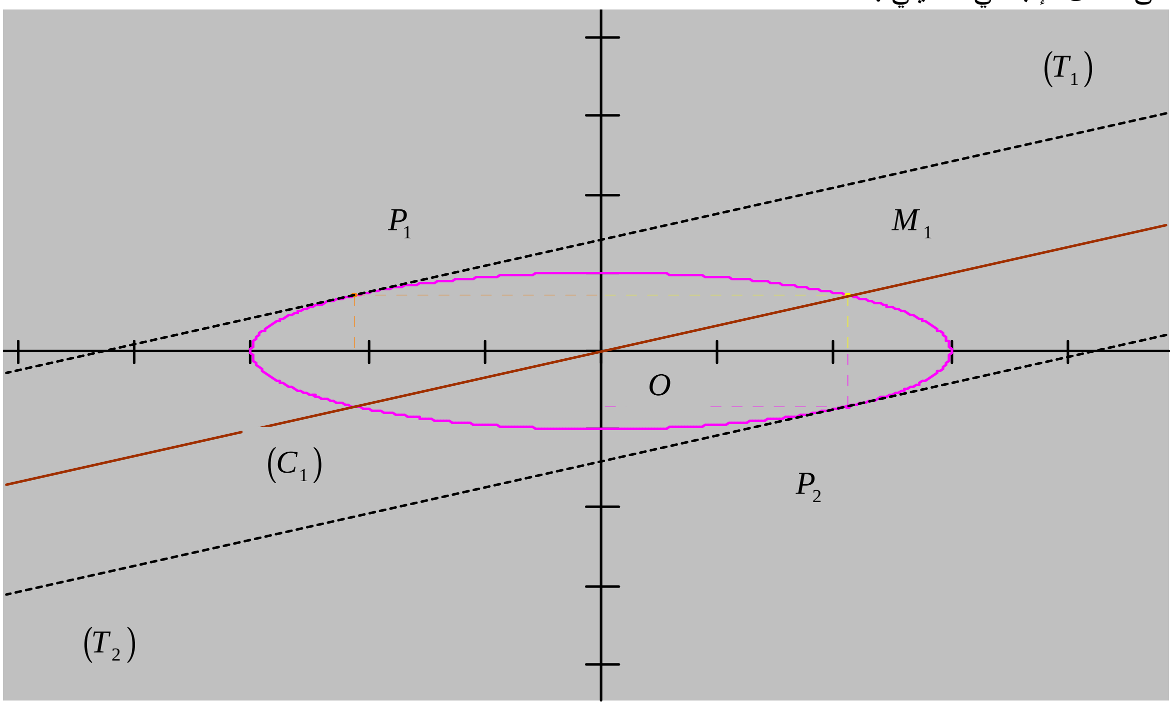
وبالتالي فإن : $S=\{3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha),3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)\}$

2) أ) لنبين أن $M_1(z_1=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))\in(C_1)$.

لدينا : $x=\Re e(z_1)=3\cos(\alpha)$ و $y=\Im m(z_1)=\sin(\alpha)$. إذن :

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=\frac{(3\cos(\alpha))^2}{9}+\frac{(\sin(\alpha))^2}{1}=\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$. ومنه نستنتج أن : $\boxed{M_1\in(C_1)}$.

ب) ننشئ الشكل الإجمالي كما يلي :



* الشكل من أجل $\alpha=\frac{\pi}{4}$ *

لتكن $P\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ نقطة من الإهليليج (C_1) حيث $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. معادلة المماس (T) للمنحنى (C_1) في النقطة P هي :

$\boxed{xx_0+9yy_0=9}\Leftrightarrow\frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{1}=1$. إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}-9y_0\\x_0\end{pmatrix}$ متجهة موجهة للمماس (T) ولدينا : $\overrightarrow{OM_1}\begin{pmatrix}3\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}$. إذن :

$(OM_1)\parallel(T)\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM_1}$ و $\vec{u}$ متجهتان مستقيميتان

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM_1},\vec{u})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}3\cos(\alpha) & -9y_0\\ \sin(\alpha) & x_0\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 3\cos(\alpha)x_0+9\sin(\alpha)y_0=0$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha)x_0+3\sin(\alpha)y_0=0$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha)x_0=-3y_0\sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

ولدينا :

$$P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in (C_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0^2}{3^2} + \frac{y_0^2}{1^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 + 9y_0^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y_0^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + 9y_0^2 = 9 \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2(\alpha) y_0^2 + \cos^2(\alpha) y_0^2 = \cos^2(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2 = \cos^2(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0 = \pm\cos(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mp 3\sin(\alpha)$$

نحصل إذن على نقطتين : $\boxed{P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}}$ و $\boxed{P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}}$

وبالتالي فإنه توجد نقطتان $P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ و $P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ من (C_1) حيث يكون فيهما المماسان (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_1)

على التوالي , موازيان للمستقيم (OM_1) ؛ حيث: $(T_1): -3\sin(\alpha)x + 9\cos(\alpha)y - 9 = 0$

و $(T_2): 3\sin(\alpha)x - 9\cos(\alpha)y - 9 = 0$

إذن: $\boxed{P_1 \in (C_1)}$ و $\boxed{P_2 \in (C_1)}$ و $\boxed{\begin{array}{ll} P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}; & (T_1): -\sin(\alpha)x + 3\cos(\alpha)y - 3 = 0 \\ P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}; & (T_2): \sin(\alpha)x - 3\cos(\alpha)y - 3 = 0 \end{array}}$ و $\boxed{(T_1) \parallel (T_2) \parallel (OM_1)}$

أنظر الشكل الإجمالي السابق .

ج) لدينا : $OM_1\left(3\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$ و $OM_2\left(3\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right)$

و $OP_1\left(-3\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)\right)$ و $OP_2\left(3\sin(\alpha) - i\cos(\alpha)\right)$

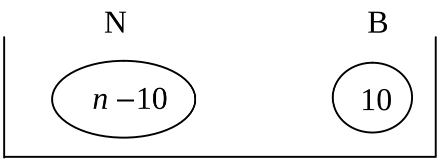
إذن : $OM_1^2 + OP_1^2 = 9\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + 9\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 10\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = 10$

و : $OM_2^2 + OP_2^2 = 9\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + 9\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 10\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = 10$

وبالتالي فإن : $\boxed{OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2}$

التمرين 3:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث : $n \geq 20$.



نسحب كرة من الكيس ونسجل لونها ؛ ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة . ولكل $0 \leq k \leq n$, نضع :

p_k = إحتمال الحصول على k كرة بيضاء .

1) الأمر يتعلق بالإختبارات المتكررة . إذن : $p_k = C_n^k \left(\frac{C_{10}^1}{C_n^1}\right)^k \left(1-\frac{C_{10}^1}{C_n^1}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ ومنه فإن :

$$\boxed{p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}}$$

2) نضع : $\boxed{u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}}$: $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$.

أ) لدينا :

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-(k+1)}}{C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}\times\frac{10}{n}\times\frac{1}{\frac{n-10}{n}} = \frac{\frac{A_n^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{A_n^k}{k!}}\times\frac{10}{n-10}$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times...\times(n-k)}{n\times(n-1)\times...\times(n-k+1)}\times\frac{k!}{(k+1)!}\times\frac{10}{n-10} = \boxed{\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}}$$

ب) لدينا :

$$\begin{aligned}
u_k \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10} \geq 1\\
&\Leftrightarrow 10(n-k) \geq (k+1)(n-10)\\
&\Leftrightarrow 10n-10k \geq nk-10k+n-10\\
&\Leftrightarrow 0 \geq nk+n-10-10n\\
&\Leftrightarrow 0 \geq nk-10-9n\\
&\Leftrightarrow 10+9n \geq nk\\
&\Leftrightarrow k \leq \frac{10+9n}{n} = 9+\frac{10}{n}
\end{aligned}$$

وبما أن : $\boxed{\frac{10}{n} \leq \frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{20} \Leftarrow n \geq 20$ ؛ فإن : $u_k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq 9+\frac{1}{2}$ وحيث أن : $k \in \mathbb{N}$ ؛ فإن :

$$(i): \boxed{u_k \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9}$$

ولدينا :

$$\begin{aligned}
u_k \leq &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10} \leq 1\\
&\Leftrightarrow 10n-10k \leq nk+n-10k-10\\
&\Leftrightarrow 9n \leq nk-10\\
&\Leftrightarrow 9n+10 \leq nk\\
&\Leftrightarrow 9+\frac{10}{n} \leq k\\
&\Leftrightarrow 10 \leq k \leq n-1
\end{aligned}$$

(لأن : $k \in \mathbb{N}$ و $k \in \{0,1,...,n-1\}$ و $n \geq 20 \Rightarrow 0 < \frac{10}{n} \leq \frac{1}{2}$)

وبالتالي فإن : $(ii): \boxed{u_k \leq 1 \Leftrightarrow 10 \leq k \leq n-1}$

ج) لدينا : $u_0 \geq 1 \Rightarrow \frac{p_1}{p_0} \geq 1 \Rightarrow p_1 \geq p_0$

و $u_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \geq 1 \Rightarrow p_2 \geq p_1$

j j j j j

و $u_9 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{p_{10}}{p_9} \geq 1 \Rightarrow p_{10} \geq p_9$ إذن : $(i): p_{10} \geq p_9 \geq ... \geq p_2 \geq p_1 \geq p_0$

ولدينا : $u_{10} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{p_{11}}{p_{10}} \leq 1 \Rightarrow p_{11} \leq p_{10}$

و $u_{11} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{p_{12}}{p_{11}} \leq 1 \Rightarrow p_{12} \leq p_{11}$

و $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

و $u_{n-1} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{p_n}{p_{n-1}} \leq 1 \Rightarrow p_n \leq p_{n-1}$ إذن : $(ii): p_n \leq p_{n-1} \leq ... \leq p_{12} \geq p_{11} \geq p_{10}$

ومن (i) و (ii) نستنتج أن : $\boxed{\forall k \in \{0,1,2,...,n\}: \quad p_k \leq p_{10}}$.

إذن أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1,2,...,n\}$ هي :

$$M = p_{10} = C_n^{10}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10} = \frac{n!}{10!(n-10)!}\times\frac{10^{10}}{n^{10}}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{n^{n-10}} = \boxed{\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}}$$

التمرين 4:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = (1+x)e^{-2x}$$

I – 1) أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} + xe^{-2x} = 0+0 = \boxed{0}$

لأنه بوضع $t = -2x$ ؛ نجد : $x \to +\infty \Rightarrow t \to -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} -\dfrac{1}{2}te^t = 0$

وبوضع $t = -2x$ ؛ نجد : $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$ و :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)e^{-2x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)e^t = -\infty\times+\infty = \boxed{-\infty}$.

ب) – لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ؛ إذن (C) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $\boxed{y=0}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)e^{-2x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{t}+1\right)e^t = \boxed{+\infty}$

حيث: $t = -2x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب .

2) ليكن $x \in \mathbb{R}$, لدينا : $f'(x) = (1+x)'e^{-2x} + (1+x)(-2)e^{-2x} = (1-2(1+x))e^{-2x} = \boxed{-(1+2x)e^{-2x}}$.

إذن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي عكس إشارة $1+2x$. ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي :

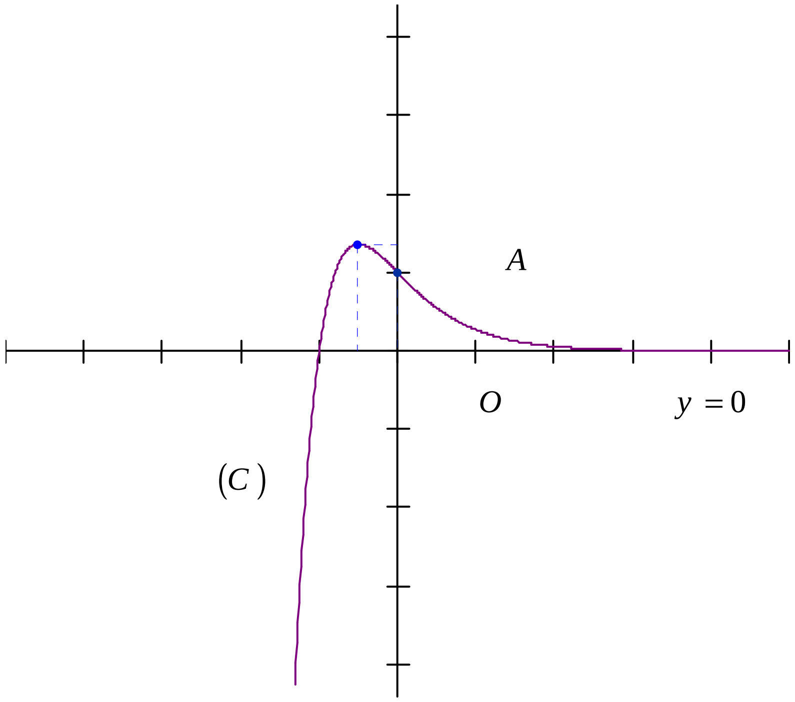
x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}e$	$\searrow$	0

3) أ) ليكن $x \in \mathbb{R}$, لدينا : $f''(x) = -(1+2x)'e^{-2x} - (1+2x)(-2)e^{-2x} = (-2+2(1+2x))e^{-2x} = \boxed{4xe^{-2x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	$+$	
تقعر المنحنى (C)		(C) مقعر	$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	(C) محدب	

إذن (C) يقبل النقطة $A(0,1)$ كنقطة انعطاف .

ب) إنشاء المنحنى (C) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



4) أ) لدينا : $f(x)=(1+x)e^{-2x}$ و $f'(x)=-(1+2x)e^{-2x}$ و $f''(x)=4xe^{-2x}$. إذن :

$$f''(x)+3f'(x)+2f(x)=4xe^{-2x}-3(1+2x)e^{-2x}+2(1+x)e^{-2x}=\left[4x-3(1+2x)+2(1+x)\right]e^{-2x}$$
$$=\left[4x-3-6x+2+2x\right]e^{-2x}=-e^{-2x}$$

ومنه فإن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : $(E):y''+3y'+2y=-e^{-2x}$.

ب) لنحل المعادلة التفاضلية $(E'):y''+3y'+2y=0$.

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E') هي : $(F):\boxed{r^2+3r+2=0}$. مميزها هو $\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1$

إذن للمعادلة (F) حلين مختلفين هما : $r_1=\dfrac{-3+1}{2}=\boxed{-1}$ و $r_2=\dfrac{-3-1}{2}=\boxed{-2}$.

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (E') هو : $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو : $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+f(x)\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. أي :

$$\boxed{y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+(1+x)e^{-2x}\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$$

II - ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

ونعتبر A_n : مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل ومحور الأراتيب والمستقيم ذي المعادلة $x=n$.

1) لدينا : $A_n=\int_0^n f(x)dx=\int_0^n(1+x)e^{-2x}dx=\int_0^n e^{-2x}dx+\int_0^n xe^{-2x}dx=\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n+I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}+I$

حيث : $I=\int_0^n xe^{-2x}dx$. نضع : $\begin{cases}u'(x)=e^{-2x}\\ v(x)=x\end{cases}$. إذن : $\begin{cases}u(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\\ v'(x)=1\end{cases}$. باستعمال مكاملة بالأجزاء نجد :

$$I=\int_0^n u'(x)v(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_0^n-\int_0^n u(x)v'(x)dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^n+\frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}ne^{-2n}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n=-\frac{1}{2}ne^{-2n}-\frac{1}{4}\left(e^{-2n}-1\right)$$

ومنه فإن : $A_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}-\dfrac{1}{2}ne^{-2n}-\dfrac{1}{4}\left(e^{-2n}-1\right)=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}\right)e^{-2n}+\dfrac{3}{4}=\boxed{-\dfrac{1}{4}(3+2n)e^{-2n}+\dfrac{3}{4}}$

2) لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{4}(3+2n)e^{-2n} + \frac{3}{4} = \lim\limits_{m\to+\infty} -\frac{1}{4}\left(\frac{3+m}{e^m}\right)+\frac{3}{4}$ ؛ حيث : $m = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{m\to+\infty} -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{e^m}+\frac{1}{\frac{e^m}{m}}\right)+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{3}{4}(u.a.)}$

III – نضع : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = n\int_0^1 [f(x)]^n dx}$

1) نضع $t = nx$. إذن : $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$ و $x = 1 \Leftrightarrow t = n$ و $dt = ndx$. ومنه باستعمال مكاملة بتغيير المتغير نجد :

$$u_n = \int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n dt = \int_0^n \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-2\frac{t}{n}}\right]^n dt = \boxed{\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt}$$

2) أ) ليكن $u \in [1,2]$. إذن $1 \le u \le 2$ ومنه فإن : $\frac{1}{u} \le 1$. ولدينا : $\frac{1}{u}-(2-u) = \frac{1-2u+u^2}{u} = \frac{(u-1)^2}{u} \ge 0$. إذن :

$2-u \le \frac{1}{u}$. وبالتالي فإن : $\forall u \in [1,2]: \quad \boxed{2-u \le \frac{1}{u} \le 1}$

ب) لدينا : $\forall u \in [1,2]: \quad 2-u \le \frac{1}{u} \le 1$. نضع : $t = u-1$ أي $u = t+1$. إذن : $u \in [1,2] \Leftrightarrow t \in [0,1]$.

ومنه نستنتج التأطير التالي : $\forall t \in [0,1]: \quad 2-(t+1) \le \frac{1}{t+1} \le 1$. أي : $\boxed{\forall t \in [0,1]: \quad 1-t \le \frac{1}{t+1} \le 1}$

إذن : $\forall u \in [0,1]: \quad \int_0^u (1-t)dt \le \int_0^u \frac{1}{t+1}dt \le \int_0^u dt \Rightarrow \forall u \in [0,1]: \quad \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^u \le [\ln(t+1)]_0^u \le u-0$

$$\Rightarrow \boxed{\forall u \in [0,1]: \quad u-\frac{u^2}{2} \le \ln(u+1) \le u}$$

نضع : $u = \frac{x}{n}$. لدينا $x \in [0,n]$ ؛ إذن $u = \frac{x}{n} \in [0,1]$. ولدينا : $u-\frac{u^2}{2} \le \ln(u+1) \le u$. إذن :

$\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n}$ ؛ ومنه نجد : $\boxed{x-\frac{x^2}{2n^2} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \forall x \in [0,n];$

3) أ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا : $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$. ليكن $t \in [0,n]$. لدينا :

$$n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \le t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right) \le t$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \le e^t$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} \le e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt \le \int_0^n e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_n \le \int_0^n e^{-t}dt}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n \le \int_0^n e^{-x}dx}$

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$$t-\frac{t^2}{2n}\leq n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \Rightarrow e^{t-\frac{t^2}{2n}}\leq\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow e^{-t-\frac{t^2}{2n}}\leq\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\leq u_n}$$

لدينا : $n\geq 1\Rightarrow n^2\geq 1\Rightarrow n^3\geq n\Rightarrow n\geq\sqrt[3]{n}$. ولدينا : $\forall t\in[0,n]: e^{-t-\frac{t^2}{2n}}\geq 0$ ؛ إذن :

و لدينا : $\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\leq\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt$

$$0\leq t\leq\sqrt[3]{n} \Rightarrow 0\leq t^2\leq\sqrt[3]{n^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{n^2}\leq -t^2\leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}\leq-\frac{t^2}{2n}\leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\leq e^{-\frac{t^2}{2n}}\leq 1$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}-t}\leq e^{-t-\frac{t^2}{2n}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}-t}dt\leq\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-t}dt\leq\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\leq\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\leq u_n$$

من أ و ب نستنتج أن : $(*):\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\ e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}dx\leq u_n\leq\int_0^n e^{-x}dx}$

ج) لدينا : $\int_0^n e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^n=\boxed{1-e^{-n}}$. ولدينا : $\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\sqrt[3]{n}}=\boxed{1-e^{-\sqrt[3]{n}}}$. إذن العلاقة $(*)$ تصير :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\ e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\left(1-e^{-\sqrt[3]{n}}\right)\leq u_n\leq 1-e^{-n}}$. وبما أن : $\lim_{n\to+\infty}1-e^{-n}=\boxed{1}$ و $\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\left(1-e^{-\sqrt[3]{n}}\right)=\boxed{1}$

فإنه حسب مصاديق التقارب , لدينا : (u_n) متتالية متقاربة نهايتها : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$

4) ليكن $a\in]0,1[$.

أ) لدينا f تناقصية على المجال $[0,+\infty[$. إذن : $\left(f(1)=2e^{-2}\geq 0\right)$

$$\forall x\in[a,1]: a\leq x\leq 1 \Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(a)$$

$$\Rightarrow 0\leq\left(f(x)\right)^n\leq\left(f(a)\right)^n$$

$$\Rightarrow \int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\leq n\left(f(a)\right)^n\int_a^1 dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\leq n(1-a)\left(f(a)\right)^n}$$

ب) لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*: 0\leq\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\leq n(1-a)\left(f(a)\right)^n$. و

$\lim_{n\to+\infty}n(1-a)\left(f(a)\right)^n=\lim_{n\to+\infty}(1-a)ne^{n\ln(f(a))}$.

و : $0<a<1\Rightarrow f(1)<f(a)<f(0)\Rightarrow 0<2e^{-2}<f(a)<1\Rightarrow\boxed{\ln\left(f(a)\right)<0}$.

إذن : $\lim_{n\to+\infty}n(1-a)[f(a)]^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-a}{\ln\left(f(a)\right)}\times n\ln\left(f(a)\right)e^{n\ln(f(a))}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-a}{\ln\left(f(a)\right)}\times xe^x=\boxed{0}$ ؛

حيث : $x = n\ln\left(f(a)\right)$ ؛ بما أن $\ln\left(f(a)\right) < 0$ فإن : $x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \boxed{0}$. حسب مصاديق التقارب ؛ لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 0}$

ج) لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx + \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx = 1}$$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall a \in \left]0,1\right[: \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx = 1}$

انتهى