ثانوية بئر أنزران . صفرو .
2012/2011 (الدّورة 2)

الدوال الأسيّة

2 بكالوريا محاسبة1 و اقتصاد1
ذ: توفيق بنعمرو

079

(الأسئلة مستقلة فيما بينها)

بالتوفيق

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_1 : \ e^x + 4e^{-x} = 5$

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_2 : \ \dfrac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = e^{7x-1}$.

3) حدّد دالة أصلية للدالة: $g(x) = \dfrac{e^x}{5-e^x}$.

4) أ) (**بكالوريا وطنية 2006**) أنشر الجداء $(X-3)(X^2-1)$.

ب) استنتج في $\mathbb{R}$ حل المعادلة: $e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0$.

ج) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 < 0$.

5) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$.

6) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $8 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 10^x = 0$

7) بيّن أنّ النقطة $A(0, \frac{1}{2})$ مركز تماثل لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

8) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $3e^{2x} - 7e^x - 20 = 0$.

9) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 - 2x - 3 = 0$ ثمّ المعادلة: $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$.

10) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$.

11) أحسب:
$$D = \lim_{+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \ ; \ C = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^2} \ ; \ B = \lim_{-\infty} x^3 e^{2x} \ ; \ A = \lim_{-\infty} x^2 e^x$$
$$G = \lim_{0} \frac{e^x - 1}{e^{5x} - 1} \ ; \ F = \lim_{+\infty} (x e^{\frac{1}{x}}) \ ; \ E = \lim_{0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

080

(**بكالوريا وطنية 2010 د س**)

الجزء الأول: نعتبر الدالة: $h(x) = x + 1 - e^x$

1) أحسب $h'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ ضع جدول التغيرات (دون حساب النهايات)

2) استنتج أنّ لكلّ x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة: $f(x) = x^2 + 2x - 2e^x$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) بيّن أنّ لكلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2h(x)$ ثمّ ضع جدول تغيرات f .

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ و أنّ $\alpha \in]-2.2 \ ; -2[$

ب) بيّن أنّ المنحنى C_h يقبل نقطة انعطاف I أفصولها 0 .

4) أحسب $f'(0)$ ثمّ حدّد معادلة المماس (T) ل C_f في I .

5) أنشئ C_f و المستقيم (T) .

081

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x) = (1-2x)e^{2x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ ثمّ استنتج طبيعة الفرع اللاّنهائي ل C_f جوار $+\infty$

3) أحسب: $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ أعط جدول التغيّرات.

4) أ) بيّن أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف يتمّ تحديد إحداثيتيها. (**مكناس 2000 / 2001**)

ب) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماسّ C_f في النّقطة ذات الأفصول $-0,5$.

5) أنشئ (T) و C_f ، الوحدة $2cm$. نأخذ: $e^{-1} \approx 0,37$.

6) أحسب ب cm^2 مساحة الحيّز المستوي المحصور ب C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرّفين بالمعادلتين $x = 0$ و $x = 0,5$.

082

لتكن الدالة f بحيث: $f(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x$

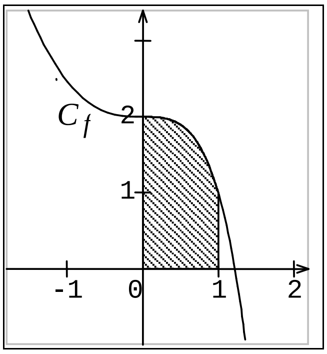
1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) تحقّق أنّ $f(x) = x^2(1 + 2(1-x)\dfrac{e^x}{x^2})$. (**بكالوريا وطنية 2008 د س**)

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

4) بيّن أنّ $f'(x) = -2x(e^x - 1)$ و أنّ f تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$.

5) التمثيل المبياني ل C_f الممثّل ل f .



أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ: $\int_0^1 x e^x \, dx = 1$.

ب) أحسب A مساحة الحيّز المستوي المخدّش.

083

(**بكالوريا وطنية 2007**)

لتكن الدالة f بحيث: $f(x) = e^{2x} + 2e^x - 4x - 3$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-4x-3))$ ثمّ استنتج أنّ المنحنى C_f يقبل مقارباً مائلاً (Δ) .

3) بيّن أنّ $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$ وأدرس إشارتها ثمّ أعط جدول التغيّرات.

4) أنشئ C_f نأخذ $f(0,5) \approx 1$ و $f(1) \approx 5,8$.

5) أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحصور ب C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرّفين بالمعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

084

I) نعتبر الدالة: $g(x) = e^x - 2x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ (**فرض منزلي 2008 / 2009**)

2) أحسب $g'(x)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

3) استنتج أنّ: $\forall x \in \mathbb{R} : \ g(x) > 0$. نأخذ: $\ln 2 \approx 0,7$.

II) نعتبر الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + 1 + \dfrac{2x+2}{e^x}$

1) حدّد $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ وتحقّق أنّ ل C_f فرع شلجمي في اتجاه الأراتيب جوار $-\infty$

2) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta) : y = x + 1$ مقارب مائل ل C_f جوار $+\infty$.

3) بيّن أنّ $\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$ و ضع جدول تغيّرات f .

4) بيّن أنّ $\forall x \in \mathbb{R} : \ f''(x) = \dfrac{2x-2}{e^x}$ و أدرس تقعّر C_f محدّداً نقطة الانعطاف

5) حدّد معادلة المستقيم (T) المماس ل C_f في 0 .

6) أنشئ C_f و (T) . معطيات: $f(-1) = 0$ و $f(1) \approx 3,5$

085

I) نعتبر الدالة: $g(x)=(1+x)e^x+1$. (بكالوريا وطنية 2006)

أحسب $g'(x)$ ثمّ أعط جدول تغيّرات g ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة: $f(x)=x(e^x+1)$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ المستقيم $(D): y=x$ مقارب ل C_f جوار $-\infty$

3) بيّن أنّ: $f'(x)=g(x)$ ثم ضع جدول التغيّرات.

4) بيّن أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف أفصولها -2.

5) حدّد معادلة المستقيم (T) مماس C_f في 0 .ثمّ أنشئ C_f .

6) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب $I=\int_0^1 xe^x\,dx$

ب) استنتج مساحة الحيّز بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

086

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x)=\frac{x-1}{x}\cdot e^x$

1) أ) أحسب $\lim_{x\to0+} f(x)$ و $\lim_{x\to0-} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (بكالوريا وطنية 2005 د - س)

(لاحظ أنّ $\frac{f(x)}{x}=(\frac{x-1}{x})\frac{e^x}{x}$) ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}e^x$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

3) نقبل أنّ $I(1,0)$ نقطة انعطاف، أكتب معادلة المماس ل C_f في I .

4) حدّد $f(-1)$ و $f(2)$ ثمّ أنشئ C_f نأخذ: $e\approx2,7$ و $\frac{2}{e}\approx0,7$ و $\frac{e^2}{2}\approx3,7$

5) أ) g قصور f على $I=]0,+\infty[$ ، بيّن أنّ g تقابل من I نحو J يتمّ تحديده

ب) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

087

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x^2-1-(x-1)e^x$

1) أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (لاحظ أنّ $f(x)=xe^x(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{xe^x}-\frac{x-1}{x})$)

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج. (بكالوريا وطنية 2004)

ب) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج.

2) أحسب: $f'(x)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

3) أحسب $f(1)$ ثمّ أنشئ C_f . الوحدة $5cm$.

088

(بكالوريا وطنية 2011 د س)

نعتبر $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)$ حيث $x\in I=]-\infty,0]$.

I) 1) بيّن أنّ $\forall x\in I: g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ و أحسب $g(0)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2) ضع جدول التغيرات و استنتج أنّ $\forall x\le0: g(x)<0$.

3) أ) أحسب $g''(x)$ لكلّ x من I ثمّ استنتج تقعر C_g

ب) أحسب $g'(0)$ ثمّ أنشئ C_g الوحدة $4cm$ و $g(0)\approx-0,2$.

II) 1) نعتبر الدالة: $f(x)=\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$ بوضع $t=e^x$ بيّن أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

2) أ) أحسب $f'(x)$ لكلّ x من I و استنتج أنّ $\forall x\in I: f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب) أحسب $f(0)$ وضع جدول التغيرات ثمّ استنتج أنّ: $\forall x\in I: \ln2\le f(x)\le1$

089

نعتبر الدالة: $f(x)=2x+\frac{e^x}{e^x-1}$

1) حدّد D_f و أحسب نهايات f عند محدّات مجموعة تعريفها.

2) حدّد الفروع اللانهائية ل C_f .

3) أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ ضع جدول التغيّرات.

4) أنشئ المنحنى C_f .

5) أحسب مساحة الحيّز بين C_f و المستقيمات $x=1$ و $x=2$ و $y=0$

090

نعتبر $f(x)=-x+\ln(1-e^{-x})$ المعرّفة على $]0,+\infty[$

1) أ) أحسب $\lim_{x\to0+} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة ثمّ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

2) أ) أحسب $f'(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{2-e^x}{e^x-1}$. (بكالوريا وطنية 2003)

ب) أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

3) أنشئ المستقيم $(D): y=-x$ ثمّ أنشئ C_f .

بالتوفيق

4) لتكن g قصور f على $I=[\ln2\,;+\infty[$.

بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ أنشئ منحنى g^{-1} .

091

الجزء 1: نعتبر الدالة: $h(x)=xe^x-1$.

1) أحسب $h'(x)$ لكلّ x من $[0,+\infty[$ ثمّ بيّن أنّ h تزايدية قطعاً على $[0,+\infty[$.

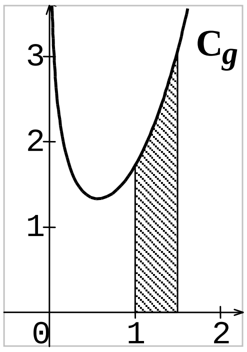
2) أ) بيّن أنّه يوجد عدد α وحيد من $]0,1[$ بحيث $h(\alpha)=0$.

ب) ضع جدول تغيرات h على $[0,+\infty[$.

ج) استنتج أنّ $\forall x\in]0,\alpha[: h(x)<0$ و أنّ $\forall x\in]\alpha,+\infty[: h(x)>0$.

الجزء 2: نعتبر الدالة: $g(x)=e^x-1-\ln x$ المعرّفة على $]0,+\infty[$

1) أ) أحسب $\lim_{x\to0+} g(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.



ب) بيّن أنّ: $g(x)=e^x(1-\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{e^x})-1$

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$

2) بيّن أنّ: $g'(x)=\frac{h(x)}{x}$ (بكالوريا وطنية 2009 دس)

و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيرات.

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^{\frac{3}{2}}\ln x\,dx$.

4) أحسب مساحة الجزء المخدّش

092

I) نعتبر الدالة $f(x)=0,5x+e^{-0,5x+1}$ المعرّفة على $[0,5]$.

1) أ) حلّ في المجال $[0,5]$ المعادلة $1-e^{-0,5x+1}=0$.

ب) حلّ في المجال $[0,5]$ المتراجحة $1-e^{-0,5x+1}\ge0$

2) أحسب $f'(x)$ ثمّ أعط جدول تغيرات f على $[0,5]$.

3) أنشئ C_f الوحدة $2cm$ في محور الأفاصيل و $8cm$ في محور الأراتيب.

II) تصنع مقاولة وحدات من منتوج ما؛ الكلفة الإجمالية للانتاج يعبّر عنه بالدالة f (x يعبّر عنه بمئات الوحدات و $f(x)$ بآلاف الدراهم $x\in[0,5]$

1) ما هو عدد الوحدات التي ينبغي إنتاجها لكي تكون الكلفة الإجمالية دنوية ؟

2) تُباع كلّ وحدة منتجة ب 6 دراهم.

أ) أنشئ في المعلم السّابق المستقيم الذي معادلته $y=0,6x$.

ب) أحسب الرّبح $B(x)$ بآلاف الدراهم المحصّل عليه بعد بيع x وحدة.