BAC BLANC MARS 2024 – DURÉE : 04 HEURES

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES

NIVEAU : 2ÈME BAC SCIENCE MATHÉMATIQUE

➤ ***Notes :***

Le sujet se compose de trois exercices et un problème tous indépendants.

Un exercice d'arithmétique.

Un exercice sur les nombres complexes.

Un exercice sur les suites et les sommes de Riemann.

Un problème sur l'exponentielle et les fonctions définies par une intégrale.

○ Exercice n°01 : (3,5pts)

I- *On considère dans* $\mathbb{Z}$, *l'équation suivante* $(E): ax + b_n \equiv 0\ [11]$.

Où : $a = 2017^{2017}$ *et* $b_n = \sum_{k=0}^{n} (2017)^k$, *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

0,75 — **1)- a)-** *Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel* p, *le reste de la division euclidienne de* 4^p *par* 11.

0,5 — **b)-** *En déduire que :* $a \equiv 5\ [11]$.

0,5 — **2)- a)-** *Montrer que si* x *est solution de* (E), *alors :* $x \equiv 2b_n\ [11]$.

0,5+0,75 — **b)-** *Déterminer l'ensemble des solutions de* (E), *puis en déduire ses solutions qui sont divisibles par* 11.

0,5 — **3)-** *Déterminer les solutions de* (E) *qui sont divisibles par* 5.

Bonus — **II-** *Pour tout entier naturel* $n \geq 2$, *On pose :* $c_n = \overline{\underbrace{99...99}_{n\ fois}}^{(10)}$.

On désigne par d_n *la somme des chiffres du nombre :* $N = 198c_n$.

1 — ✓ *Montrer que :* $(\forall n \geq 2);\ d_n \equiv 0\ [n]$.

Exercice n°02 : (3,5pts)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$\left(E_\theta\right):\ 2z^2-2z.e^{i\theta}+i\sin(\theta).e^{i\theta}=0,\ \text{Où } \theta\in\left]0;\pi\right[.$$

0,5 **1)-** Montrer que $\left(E_\theta\right)$ admet deux solutions distinctes que l'on déterminera.

2)- On pose : $z_1=\dfrac{e^{i\theta}+1}{2}$ et $z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{2}$.

0,5 **a)-** Ecrire $z_1.z_2$ sous forme trigonométrique.

0,5 **b)-** Montrer que : $z_1=\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right).e^{i.\frac{\theta}{2}}$. Puis écrire z_2 sous forme trigonométrique.

II- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, On considère les points M ; A ; B ; M_1 et M_2 d'affixes respectifs : $e^{i\theta}$; $a=1$; $b=-1$; z_1 et z_2.

0,25 **1)- a)-** Montrer que MAB est un triangle rectangle en M.

0,25 **b)-** Montrer que les droites (AB) et $\left(M_1M_2\right)$ sont parallèles.

2)- Soient h l'homothétie de centre M et de rapport $k=2$ et r la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$. On pose : $r(A)=C$.

0,5 **a)-** Montrer que : $h\left(M_1\right)=A$ et $h\left(M_2\right)=B$.

0,5 **b)-** Montrer que les points M ; B et C sont alignés, puis en déduire que le nombre $Z=\dfrac{1+e^{i\theta}}{i\left(1-e^{i\theta}\right)}$ est réel.

0,5 **3)-** Déterminer θ pour que le périmètre du triangle MAB soit maximal.

Exercice n°03 : (02pts)

➩ Soit f la fonction définie par : $f(t)=\ln^2(1+t)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose :

$$u_n=\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k+a}{n}\right)\ \text{et}\ V_n=u_n-\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right),\ \text{Où } a\in\left]0;1\right[.$$

0,25 **1)-** Montrer que : $\left(\forall t\in[0;1]\right);\ 0\le f'(t)\le 2$.

0,5 **2)- a)-** Eu utilisant deux intégrations par parties, montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt=2\left(\ln(2)-1\right)^2.$$

0,25 **b)-** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

0,5 **3)- a)-** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\left|V_n\right|\le\dfrac{2}{n}$.

0,5 **b)-** En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

○ Problème : (11pts)

03 pts

I- *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

0,25 — **1)- a)-** *Montrer que* g *est impaire.*

0,25 — **b)-** *Calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, *puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0,25 — **2)- a)-** *Montrer que* g *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

0,25 — **b)-** *Ecrire l'équation de la tangente* (T) *à* (C_g) *au point d'abscisse* $x_0 = 0$.

0,25 — **3)- a)-** *Montrer que* g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle* J *que l'on déterminera.*

0,25 — **b)-** *Déterminer* $g^{-1}(x)$ *en fonction de* x, *pour tout* $x \in J$.

1 — **4)-** *Construire* (C_g) *et* $(C_{g^{-1}})$ *dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *Où* $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

0,5 — **5)-** *Calculer en* cm^2, *l'aire du secteur* (Δ) *définie par :*

$$(\Delta) = \left\{ M(x,y) \in (\mathrm{P}) / (x,y) \in [0; ln(2)]^2 \ et\ g(x) \le y \le g^{-1}(x) \right\}.$$

04 pts

II- *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(0) = 1 \ et\ f(x) = \frac{2x}{x + g(x)};si\ x \ne 0.$$

0,5 — **1)- a)-** *Justifier que :* $D_f = \mathbb{R}$. *Puis calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

0,5 — **b)-** *Montrer que* f *est paire, puis en déduire* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0,5 — **2)-** *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

0,25 — **3)- a)-** *Vérifier que :* $(\forall t \in \mathbb{R});\ g'(t) = 1 - (g(t))^2$.

0,25 — **b)-** *En déduire que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ x - \dfrac{x^3}{3} \le g(x) \le x$.

0,25 — **4)- a)-** *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x - g(x)}{2x^2} \times f(x)$.

0,25 — **b)-** *En déduire que* f *est dérivable en* $x_0 = 0$ *et que :* $f'(0) = 0$.

0,5 — **5)- a)-** *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});\ f'(x) = 2 \times \frac{g(x) - x.g'(x)}{(x + g(x))^2}.$$

0,5 — **b)-** *En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});\ g(x) - x.g'(x) > 0.$$

0,5 — **c)-** *En déduire la monotonie de* f *sur* $\mathbb{R}^+$, *puis déterminer* $f(\mathbb{R})$.

04 pts

III- *Soit F la fonction définie par :*

$$F(0)=0 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}.\int_0^x \ln\left(f(t)\right)dt;\text{si } x\neq 0.$$

0,25 — *1)- a)- Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.*

0,25 — *b)- Montrer que F est paire.*

0,25 — *2)- a)- En appliquant le théorème de la moyenne, montrer que :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):\ 0\leq F(x)\leq \ln\left(f(x)\right).$$

0,25 — *b)- En déduire que F est continue en $x_0=0$.*

0,5 — *c)- Montrer que F est dérivable en $x_0=0$ et préciser $F'(0)$.*

0,5 — *3)- a)- Justifier que :* $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}\right):\ \dfrac{2t}{1+t}\leq f(t)\leq 2$.

0,5 — *b)- En déduire que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, on a :*

$$\frac{1}{x}.\left(\int_0^1 \ln\left(f(t)\right)dt+\int_1^x \ln\left(\frac{2t}{1+t}\right)dt\right)\leq F(x)\leq \ln(2).$$

0,25 — *c)- Montrer que :* $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):\ \displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{2t}{1+t}\right)dt=(x+1).\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\ln(x)$.

0,25 — *d)- En déduire :* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$, *puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0,5 — *4)- a)- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, et que :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right):\ F(x)=\frac{\ln\left(f(x)\right)-F(x)}{x}.$$

0,5 — *b)- Dresser le tableau de variation complet de F en justifiant la réponse.*

Bonus

IV- *Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, On pose :*

$$G_0(x)=x \text{ et } \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):\ G_n(x)=\int_0^x \left(g(t)\right)^n dt.$$

0,25 — *1)- Exprimer $G_1(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.*

0,5 — *2)- Montrer que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):0\leq G_n(x)\leq x\left(g(x)\right)^n$. *Puis déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}G_n(x)$.

0,25 — *3)- a)- Montrer que :* $\left(\forall k\in\mathbb{N}\right):\ G_{k+2}(x)=G_k(x)-\dfrac{1}{k+1}\left(g(x)\right)^{k+1}$.

0,5 — *b)- En déduire que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):\ G_{2n}(x)=x-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\left(g(x)\right)^{2k-1}$.

0,5 — *4)- Déterminer la limite de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1).3^{2k-1}}.$$

Fin Du Sujet