

○ Exercice n°02 : (3,5pts)

I- On considère dans \mathbb{C} , l'équation suivante :

$$(E_\theta) : 2z^2 - 2z.e^{i\theta} + i \sin(\theta).e^{i\theta} = 0, \text{ OÙ } \theta \in]0; \pi[.$$

0,5

1)- Montrer que (E_θ) admet deux solutions distinctes que l'on déterminera.

2)- On pose : $z_1 = \frac{e^{i\theta} + 1}{2}$ et $z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{2}$.

0,5

a)- Ecrire $z_1.z_2$ sous forme trigonométrique.

0,5

b)- Montrer que : $z_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i.\frac{\theta}{2}}$. Puis écrire z_2 sous forme trigonométrique.

II- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , On considère

les points $M ; A ; B ; M_1$ et M_2 d'affixes respectifs : $e^{i\theta}$; $a = 1$; $b = -1$; z_1 et z_2 .

0,25

1)- a)- Montrer que MAB est un triangle rectangle en M .

0,25

b)- Montrer que les droites (AB) et (M_1M_2) sont parallèles.

2)- Soient h l'homothétie de centre M et de rapport $k = 2$ et r la rotation de centre

M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose : $r(A) = C$.

0,5

a)- Montrer que : $h(M_1) = A$ et $h(M_2) = B$.

0,5

b)- Montrer que les points $M ; B$ et C sont alignés, puis en déduire que le nombre

$$Z = \frac{1 + e^{i\theta}}{i(1 - e^{i\theta})} \text{ est réel.}$$

0,5

3)- Déterminer θ pour que le périmètre du triangle MAB soit maximal.

○ Exercice n°03 : (02pts)

⇒ Soit f la fonction définie par : $f(t) = \ln^2(1+t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k+a}{n}\right) \text{ et } V_n = u_n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k}{n}\right), \text{ OÙ } a \in]0; 1[.$$

0,25

1)- Montrer que : $(\forall t \in [0; 1]) ; 0 \leq f'(t) \leq 2$.

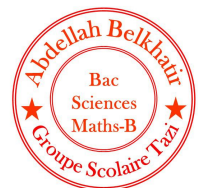
0,5

2)- a)- En utilisant deux intégrations par parties, montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt = 2(\ln(2) - 1)^2.$$

0,25

b)- En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.



0,5

3)- a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |V_n| \leq \frac{2}{n}$.

0,5

b)- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

○ **Problème** : (11pts)

03 pts

I- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

0,25
0,25

1)- a)- Montrer que g est impaire.

b)- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25
0,25

2)- a)- Montrer que g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b)- Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

0,25

3)- a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

0,25

b)- Déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

1

4)- Construire (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , où $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

0,5

5)- Calculer en cm^2 , l'aire du secteur (Δ) définie par :

$$(\Delta) = \left\{ M(x, y) \in (P) / (x, y) \in [0; \ln(2)]^2 \text{ et } g(x) \leq y \leq g^{-1}(x) \right\}.$$

II- On considère la fonction f définie par :

04 pts

$$f(0) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{2x}{x + g(x)}; \text{ si } x \neq 0.$$

0,5

1)- a)- Justifier que : $D_f = \mathbb{R}$. Puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

0,5

b)- Montrer que f est paire, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5

2)- Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

0,25

3)- a)- Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}); g'(t) = 1 - (g(t))^2$.

0,25

b)- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x$.

0,25

4)- a)- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{**}); \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - g(x)}{2x^2} \times f(x)$.

0,25

b)- En déduire que f est dérivable en $x_0 = 0$ et que : $f'(0) = 0$.

0,5

5)- a)- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^{**} et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}); f'(x) = 2 \times \frac{g(x) - x.g'(x)}{(x + g(x))^2}.$$

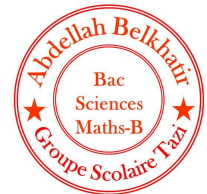
0,5

b)- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}); g(x) - x.g'(x) > 0.$$

0,5

c)- En déduire la monotonie de f sur \mathbb{R}^+ , puis déterminer $f(\mathbb{R})$.



04 pts

III- Soit F la fonction définie par :

$$F(0) = 0 \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \ln(f(t)) dt; \text{ si } x \neq 0.$$

0,25
0,25

1)- a)- Justifier que F est définie sur \mathbb{R} .

b)- Montrer que F est paire.

0,25

2)- a)- En appliquant le théorème de la moyenne, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) : 0 \leq F(x) \leq \ln(f(x)).$$

0,25

b)- En déduire que F est continue en $x_0 = 0$.

0,5

c)- Montrer que F est dérivable en $x_0 = 0$ et préciser $F'(0)$.

0,5

3)- a)- Justifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{**}) : \frac{2t}{1+t} \leq f(t) \leq 2$.

0,5

b)- En déduire que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{x} \cdot \left(\int_0^1 \ln(f(t)) dt + \int_1^x \ln\left(\frac{2t}{1+t}\right) dt \right) \leq F(x) \leq \ln(2).$$

0,25

c)- Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) : \int_1^x \ln\left(\frac{2t}{1+t}\right) dt = (x+1) \cdot \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \ln(x)$.

0,25

d)- En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5

4)- a)- Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^{**} , et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}) : F(x) = \frac{\ln(f(x)) - F(x)}{x}.$$

0,5

b)- Dresser le tableau de variation complet de F en justifiant la réponse.

IV- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, On pose :

$$G_0(x) = x \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : G_n(x) = \int_0^x (g(t))^n dt.$$

Bonus

0,25

1)- Exprimer $G_1(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

0,5

2)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq G_n(x) \leq x(g(x))^n$. Puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

0,25

3)- a)- Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) : G_{k+2}(x) = G_k(x) - \frac{1}{k+1} (g(x))^{k+1}$.

0,5

b)- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : G_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} (g(x))^{2k-1}$.

0,5

4)- Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1) \cdot 3^{2k-1}}.$$

Fin Du Sujet

