نهاية دالة عددية

أهداف الدرس

- تقريب مفهوم نهاية لا منتهية لدالة عددية عند $+\infty$ و $-\infty$
- تقريب مفهوم نهاية منتهية لدالة عددية عند $+\infty$ و $-\infty$
- النهايات المرجعية عند $+\infty$ و $-\infty$
- النهايات المرجعية عند الصفر
- قراءة نهايات مبيانيا
- نهاية دالة في نقطة
- النهاية على اليمين وعلى اليسار لدالة في نقطة
- التمكن من إزالة أشكال غير محددة
- توظيف العمليات على النهايات
- التمكن من حساب نهايات الدوال الحدودية
- التمكن من حساب نهايات الدوال الجذرية
- توظيف نهايات مثلثية اعتيادية لحساب في حساب نهايات مثلثية
- توظيف خاصيات الترتيب لحساب نهايات دوال بسيطة

القدرات المنتظرة

- حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية
- حساب النهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية

فقرات الدرس

- نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.
  - نهايات مرجعية
- نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.
  - نهايات مرجعية
- النهاية المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة.
- النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة.
- العمليات على النهايات.
- نهاية الدوال اللاجذرية.
- نهايات الدوال المثلثية.
- النهايات والترتيب.

I)- نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ و عند $-\infty$

نشاط1

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^3$.

1)- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2)- أتمم الجدول التالي:

x	0	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$					

ماذا تستنتج عندما يصبح العدد x أكبر فأكبر؟

نتيجة:

- إذا كان x أكبر بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يصبح أكبر فأكبر : نقول إن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- بنفس الطريقة , إذا كان x عددا سالبا قيمته المطلقة أكبر بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ عدد سالب قيمته المطلقة تصبح أكبر فأكبر : نقول إن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

نهايات اعتيادية

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\forall x\in\mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ إذا كان $n\neq 0$ عددا زوجيا و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n عددا فرديا .

II)- نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ و عند $-\infty$

نشاط2

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

1)- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2)- أتمم الجدول التالي:

x	1	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$					

ماذا تستنتج عندما يصبح العدد x أكبر فأكبر ؟ ثم أول هذه النتيجة مبيانيا.

نتيجة:

- إذا كان x أكبر بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من الصفر : نقول إن الدالة f تؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى $+\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
- بنفس الطريقة , إذا كان x عددا سالبا قيمته المطلقة أكبر بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من الصفر : نقول إن الدالة f تؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

نهايات اعتيادية

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

$\forall x\in\mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ و $\forall x\in\mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

خاصية

لتكن f دالة و l عددا حقيقيا.

- إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-l\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-l\right)=0$

تمرين

باستعمال الخاصية السابقة بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+x}{x^3}=-2$

III)- النهاية المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

1)- نهاية منتهية لدالة في نقطة

نشاط03

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

1)- حدد D_f و تحقق من أن : $\forall x\in D_f, f(x)=x+1$

2)- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

3)- أتمم الجدول التالي:

x	0.9	0.99	0.999	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$						

ماذا تستنتج عندما يقترب العدد x من العدد 1؟

نتيجة:

- إذا كان x قريب من العدد 1 بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد 2 :
- نقول إن الدالة f تؤول إلى 2 عندما يؤول x إلى 1 و نكتب: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين بحيث f معرفة على مجال من النوع $]a-\alpha,a+\alpha[$ أو على مجموعة على الشكل $]a-\alpha,a+\alpha[-\{a\}$, حيث $\alpha>0$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى العدد a فإننا نكتب : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

خاصية

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين

- إذا كانت f تقبل نهاية l في a فإن هذه النهاية وحيدة.

2)- نهايات اعتيادية

$\lim_{x\to 0} x = 0$ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to 0} x^n = 0$

أمثلة

- $\lim_{x\to 0}\left(x^{2010}-1\right)=-1$:لأن $\left(x^{2010}-1\right)+1=x^{2010}$ و لدينا $\lim_{x\to 0} x^{2010}=0$
- $\lim_{t\to 0} t^2 = 0 = \lim_{x\to -1}\left(x+1\right)^2 = \lim_{x\to -1}\left(x^2+2x+1\right)$ (بوضع: $t=x+1$)

3)- نهاية لا منتهية لدالة في نقطة

نشاط04

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2}$

1)- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2)- أتمم الجدول التالي:

x	± 1	$\pm 10^{-1}$	$\pm 10^{-2}$	$\pm 10^{-3}$	$\pm 10^{-4}$
$f(x)$					

ماذا تستنتج عندما يقترب العدد x أكثر فأكثر من الصفر ؟ ثم أول هذه النتيجة مبيانيا

نتيجة:

- إذا كان x قريب من الصفر بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يصبح أكبر فأكبر :
نقول إن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى الصفر و نكتب: $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

IV)- النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

نشاط05

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}$.

1)- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2)- أتمم الجدول التالي:

x	± 1	$\pm 10^{-1}$	$\pm 10^{-2}$	$\pm 10^{-3}$	$\pm 10^{-4}$
$f(x)$					

ماذا تستنتج عندما يقترب العدد x أكثر فأكثر من الصفر بقيم موجبة ؟ ثم أول هذه النتيجة مبيانيا

ماذا تستنتج عندما يقترب العدد x أكثر فأكثر من الصفر بقيم سالبة ؟ ثم أول هذه النتيجة مبيانيا

نتيجة:

- إذا كان x قريب من الصفر بقيم موجبة بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ يصبح أكبر فأكبر :
نقول إن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين و نكتب: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$
- إذا كان x قريب من 0 بقيم سالبة بما فيه الكفاية فإن $f(x)$ سالب و $|f(x)|$ يصبح أكبر فأكبر
نقول إن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى 0 على اليسار و نكتب: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

نهايات اعتيادية

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ إذا كان n زوجيا و غير منعدم و $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ إذا كان n فرديا

مبرهنة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=l$$

V)- العمليات على النهايات

1- النهاية و الجمع

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	

2)- النهاية و الضرب

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	
$\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	

3)- النهاية و المقلوب

$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	$l\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)$	$\dfrac{1}{l}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

4)- النهاية و الخارج

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	$l'\neq0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	

ملاحظة

- شكل غير محدد يعني أنه لا يمكن استنتاج النهاية مباشرة.
- الخاصية السابقة تبقى أيضا صحيحة إذا كان x يؤول إلى x_0 أو x_0^+ أو x_0^-.

5)- نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية

خاصية

لتكن P و Q دالتين حدوديتين و $x_0 \in \mathbb{R}$.

➢ $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ و $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ ، إذا كان $Q(x_0) \neq 0$.

➢ و إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي P و Q الأكبر درجة فإن :

- $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^n$ و $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$

أمثلة

أحسب النهايات التالية:

- $\lim_{|x|\to+\infty} \left(-2x^4 + 3x^2 - 1\right)$
- $\lim_{|x|\to+\infty} \left(4x^2 + 3x + 2\right)$
- $\lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{-2x^4 + x + 2}\right)$
- $\lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{-3x^5 + 4x - 1}{x^2 + x + 1}\right)$

VI)- نهايات الدوال اللاجذرية

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال من النوع $[a,+\infty[$ بحيث: $\forall x \in [a,+\infty[, f(x) \geq 0$

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

ملاحظة

الخاصية السابقة تبقى أيضا صحيحة إذا كان x يؤول إلى x_0 أو x_0^+ أو x_0^-.

أمثلة

أحسب النهايات التالية:

- $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x - 1}$
- $\lim_{|x|\to+\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$

VII)- نهايات الدوال المثلثية

خاصيات

- $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$
- $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
- $\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$

أمثلة

أحسب النهايات التالية:

- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$

VII)- النهايات و الترتيب

خاصيات

ليكن I مجالا من النوع $[a,+\infty[$ و $l\in\mathbb{R}$ و لتكن f و u و v دوال عددية معرفة على I

- إذا كان $\begin{cases}\forall x\in I, u(x)\leq f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- إذا كان $\begin{cases}\forall x\in I, u(x)\geq f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- إذا كان $\begin{cases}\forall x\in I, |f(x)-l|\leq u(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$
- إذا كان $\begin{cases}\forall x\in I, u(x)\leq f(x)\leq v(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة

الخاصيات السابقة تبقى أيضا صحيحة إذا كان x يؤول إلى x_0 أو x_0^+ أو x_0^-.

أمثلة

- لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2\cos^2 x\right)$

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+2\cos^2 x\geq x^2$

و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2\cos^2 x\right)=+\infty$

- لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}$

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1)- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$

2)- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$