Exercice 1

Montrer en utilisant le raisonnement par récurrence les propositions suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{n}{n+1}$
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
5. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
6. $\prod_{k=1}^{n} k \geq 2^n$

Exercice2

En utilisant le raisonnement par équivalences successives résoudre dans IR.

1. $\sqrt{-6x-2}=x-1$
2. $\sqrt{1-x+2}>x-2$
3. 7-$\sqrt{13+3x}=-3x$
4. $(\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2}) \Leftrightarrow (x,y)=(2,8)$
5. $\forall(x,y)\in IR^2 : (x+y)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}>2$

Exercice3

1. Montrer que $\forall(x,y)\in IR^2 : (x\neq y \;\; et \;\; xy\neq 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+1}\neq\frac{\sqrt{y}}{y+1}$
2. Montrer que $\forall x\in IR$: $|x-2|\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x+2}\right|\leq 1$

Exercice4

Montrer par récurrence que.

1. $\forall n\in IN : 11/(10^n-(-1)^n)$.
2. $\forall n\in IN : 9/(4^n+6n-1)$
3. $\forall n\in IN : 7/(3^{2n+1}+2^{n+2})$

Exercice5

Soient $u_0, u_1, u_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots, u_n \dots\dots$ Une infinité de nombres réels liés entre eux par la relation de récurrence suivante.

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$$

1. Calculeru_1, u_2, u_3
2. Montrer que $\forall n\in IN^*$:$0<u_n<1$.
3. Montrer que$\forall n\in IN : u_n\leq u_{n+1}$.
4. On pose $\forall n\in IN \quad v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$. Montrer que $\forall n\in IN \; v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$.