

Durée : 03h• التمرين الأول: (نقطتان)

تتكن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي: $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots + \frac{3n-2}{5^n}$.

1- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{S_n}{5} + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$.

2- بين بالترجع أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

3- استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة و حدد نهايتها.

• التمرين الثاني: (04 نقط)

I- تتكن $(a_n)_{n \geq 2}$ و $(b_n)_{n \geq 2}$ المتتاليتين المعرفتين كما يلي:

$$b_n = a_n \times \cos \frac{\pi}{2^n} \text{ و } a_n = \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^n}$$

1- بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ محدودة ورتيبة.

2- بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^2 x - \cos(2x) \geq 0$.

3- بين أن المتتالية $(b_n)_{n \geq 2}$ تزايدية.

4- بين أن المتتاليتين $(a_n)_{n \geq 2}$ و $(b_n)_{n \geq 2}$ متحاديتان. ماذا تستنتج؟

II- مهما يكن n من \mathbb{N} بحيث $n \geq 2$ ، نضع: $c_n = a_n \times \sin \frac{\pi}{2^n}$.

1- بين أن $(c_n)_{n \geq 2}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

2- استنتج النهاية المشتركة L للمتتاليتين $(a_n)_{n \geq 2}$ و $(b_n)_{n \geq 2}$.

(3)- بين أن : $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(4)- إستنتج أنه لكل n من \mathbb{N} بحيث $n \geq 2$ ، لدينا : $0 \leq a_n - L \leq \frac{\pi^2}{2^{2n+1}}$.

• التمرين الثالث:

I- تتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم (حيث الوحدة هي 4cm) .

(1)- بين أن (C_f) متماثل بالنسبة للنقطة $\Omega(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

(2)- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

(3)- بين أن f تزايدية قطعاً على المجال $[0;1]$ ، ثم ضع جدول التغيرات .

(4)- أدرس إشارة $f(x) - x$ على المجال $[0;1]$ ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

II- تتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1)- تحقق من أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بالفعل .

(2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون ثابتة إذا و فقط إذا كان : $u_0 \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

(3)- نفترض أن : $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

أدرس رقابة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

(4)- نفترض أن : $u_0 \in \left] \frac{1}{2}; 1\right[$.

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

• التمرين الرابع: (03 نقط)

I- نعتبر الدالة : $f : x \mapsto \frac{x^4 + 5x^3 + 1}{x^4 + 1}$

(1)- أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2)- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ (\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[); g(x) = f(\tan x) \end{cases}$$

أ- بين أن الدالة g تحقق شروط مبرهنة رول على المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

ب- بين أنه : $(\exists c \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) / g'(c) = 0$

ج- استنتج أنه : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) / f'(\alpha) = 0$

II- لتكن h دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث :

h تقبل عند $+\infty$ و $-\infty$ نهايتين منتهيتين و متساويتان ($\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) < \infty$)

بين أن المعادلة $(E) : h'(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في \mathbb{R} .

• التمرين الخامس: (06 نقط)

I- لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ كما يلي : $f(x) = x + \text{Arc tan}(\sqrt{x})$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1)- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2)- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

(3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{+*} و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

(4)- استنتج رقابة f ، ثم ضع جدول تغيراتها .

(5)- بين أن المشتقة f' تناقصية قطعاً على \mathbb{R}^{+*} .

(6)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(7)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال I ينبغي تحديده.

(8)- أنشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

II- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a / a \in \mathbb{R}^{+*} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

(1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$.

(2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً.

(3)- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية، أثبت أنه : $(\exists k \in]0; 1[) / (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq k u_n$.

(4)- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حد نهايتها.

• ملحوظة: تخصص نقطتان إضافيتان لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة.

abouzakariya@yahoo.fr

www.besmaths.un.ma