Notes de cours d'Algèbre
Facult des Sciences-Universit Ibn Zohr Agadir
choisies par Ahmed SANI
2016-2017

Chapitre 1

Matrices et traces

Sommaire

Ces notes de cours sont extraites d'un document numérique sur le net. Malgré les révisions sérieuses que j'ai du faire, des impuretés peuvent toujours être intruses et cachées quelque part. Veuillez me signaler toute maladresse, qui n'est pas en fait la mienne. Merci.

Les rudiments du calcul matriciel y figurant sont trop succincts. Donc ces notes ne peuvent pas se présenter comme substitut au cours assuré á l'amphi. Ainsi, ***ni les opérations de transvection ni celles de dilatation ne font objet d'aucun développement . Mais ces notions feront partie de l'examen modulaire et constiuent même le noyau dur du questionnaire.***
De même, les quelques exemples de QCM traités en présentiel, notamment ceux qui concernent les systèmes linéaires doivent être bien assimilés.

K désigne l'un des corps R ou ; E et F sont des R-espaces vectoriels ; il arrive, sans prendre aucun risque, que ces deux espaces soient considérés sur C. Mais le cas réel, comme nous l'avons expliqué au cours présentiel est largement suffisant. Nous noterons I_E et I_F les applications identiques (identités) de E et F respectivement.

1 Calcul matriciel

1.1 Vocabulaire matriciel

Définition 1.1 (Définition d'une matrice)**.**
Nous appellerons matrice d'ordre (n,p) notée $A = [a_{ij},\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p]$ d'ordre n un tableau à double entrée ayant n lignes et p colonnes.

Remarques. Juste un peu de jargon :

a. Le nombre a_{ij} intersection de la ligne i et de la colnne j est appelé le coefficient de la matrice A.

b. Si les deux nombres entiers n et p sont égaux, alors la matrice est dite **carrée**.

c. Dans une matrice carrée, les éléments a_{ii} sont dits diagonaux. Leur somme comme on va le voir, et on l'a déjà vu à la série 1 des TD joue un rôle trés important dans le sens où il est invariant par similitude (i.e par changement de base.)

Nous continuons la série des définitions comme déjà présentées au cours magistral :

Définitions 1.2. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carée.

a. M est dite symétrique si $\forall (i,j)\, m_{ij} = m_{ji}$.

b. M est dite diagonale si $\forall (i,j)\, i \neq j$ on $m_{ij} = 0$.

c. M est dite identité si $\forall (i,j)\, i \neq j$ on $m_{ij} = 0$ et pour tout $i \in \{1;2;3...;n\}$ l'on a $m_{ii} = 1$.

c. M est dite triangulaire supérieure si $\forall (i,j)\, i > j$ on $m_{ij} = 0$.

<u>*Nota Bene :*</u> L'ensemble des matrices de même ordre sera noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{R})$ ou juste $\mathcal{M}_n(\mathsf{R})$ lorsque $n = p$.

1.2 Opérations sur les matrices

A l'instar des nomres réels ou vecteurs dans le plan $\mathcal{V}_2$ (ou espace usuel $\mathcal{V}_3$), nous définissons les opérations d'addition, soustraction, multiplication par un scalaire dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{R})$ et enfin la division dans $\mathcal{M}_n(\mathsf{R})$ sous des contraintes d'homogénité assurant la possibilité d'effectuer les dites opérations.

Définitions 1.3. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq p}$ et $N = (n_{ij})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq p}$ deux matrices carrées.

a. La somme de M et N est la matrice notée $M + N = (s_{ij})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq n}$ avec $s_{ij} = m_{ij} + n_{ij}$ pour tous i et j.

b. Le produit d'un scalaire k et M la matrice $kM = (km_{ij})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq p}$

c. Ainsi la différence $M - N$ est donnée par la somme $M + (-1)N = (d_{ij})_{1\leq i\leq n;\,1\leq j\leq n}$ avec $d_{ij} = m_{ij} - n_{ij}$ pour tous i et j.

d. **<u>Attention :</u>** Le produit des 2 matrices $M_{n,p}$ et $N_{r,q}$ n'est défini que si le nombre de colonnes p de M est égal exactement au nombre de lignes r de N, auquel cas l'élément p_ij du produit $M \times N = MN$ vaut $p_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=r} m_{ik}n_{kj}$.

Comme proposés aux exercices de la série 1, on montre que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{R})$ est un espace vectoriel de dimension np et que l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathsf{R})$ des matrices carrées est une algèbre. Mais il est commode de se rappeler que le produit de matrices n'est pas commutatif. Pire encore, il arrive dans des situations que l'un des produits ne soit déini.
A ce propos, il est instructif de refaire les exemples proposés au cours et aux séries de TD.

2 Trace

2.1 Trace d'une matrice

Définition 2.1 (Trace d'une matrice)**.**
toute matrice carrée $A = [a_{ij}]$ d'ordre n, on associe le nombre $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ que l'on nomme *trace* de la matrice A.

$$\boxed{\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Proposition 2.1 (Trace d'une combinaison linéaire de matrices)**.**
tr *est une forme linéaire non nulle sur* $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$.

Démonstration. Facile à établir. cqfd

La remarque ci-aprés et le corollaire qui la suit peuvent être survolés dans une premiè lecture car l'aspect de dualité n'est pas suffisamment développé en présentiel.

Remarque. On note $E^{i,j}$ ou comme à la série 1 des travaux dirigés E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui l'intersection de la i^{me} ligne et de la j^{me} colonne qui vaut 1 ; la famille $(E^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$ (appelée base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$). La base duale $\mathcal{B}^* = (\varphi^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ vérifie

$$\operatorname{tr} = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{i,i}$$

ce qui montre que tr est une forme linéaire non nulle.

Corollaire. ker(tr) *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$ *dont un supplémentaire est la droite (vectorielle) des matrices scalaires,* i.e. *la droite dirigée par* I_n.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathsf{K}) = \ker(\operatorname{tr}) \oplus \mathsf{K}I_n}$$

Démonstration. Puisque tr est une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan ; puisque $\operatorname{tr} I_n = n \neq 0$, la droite dirigée par I_n est un supplémentaire de ker(tr). cqfd

Théorème 2.2 (Trace d'un produit de matrices).
Si A et B sont deux matrices, A de taille $n \times p$ et B de taille $p \times n$, les traces de AB et BA sont égales.

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathsf{K}),\ \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA}$$

Démonstration. AB (resp. BA) est une matrice carrée d'ordre n (resp. p) et

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{si} \Big) = \sum_{s=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{is} b_{si}$$
$$\operatorname{tr} BA = \sum_{j=1}^{p} (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{r=1}^{n} b_{jr} a_{rj} \Big) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rj}$$

cqfd

2.2 Matrices semblables

Définition 2.2 (Matrices semblables).
Deux matrices carrées d'ordre n A et B sont *semblables* s'il existe une matrice carrée d'ordre n et inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K}) \text{ sont semblables } \iff \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathsf{K}),\ B = P^{-1}AP}$$

Remarques.
La matrice unité d'ordre n I_n n'est semblable qu' elle même.
La relation « être semblable » est une relation d'équivalence.

Théorème 2.3 (Endomorphisme et matrices semblables).
Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les matrices $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables.

Démonstration. Notons P la matrice de changement de bases de la base $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}'$, matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ relativement $\mathcal{B}$, soit $P = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Dans ce cas, on a :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P^{-1} \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) P \tag{2.1}$$

cqfd

Corollaire (Trace de deux matrices semblables).
Deux matrices semblables ont même trace.

$$\boxed{\forall (A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathsf{K}),\ \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A}$$

On rappelle que $\mathcal{GL}_n(\mathsf{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficient dans le corps K qui, comme nous l'avons souligné, est celui des réels $\mathbb{R}$.

Démonstration.
$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(AP)\big) = \operatorname{tr}\big((AP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(A(PP^{-1})\big) = \operatorname{tr} A$ cqfd

Remarque. $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$ mais $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. Voici un contre-exemple :

$$\begin{aligned} E^{1,2}E^{2,1}E^{1,1} = E^{1,1}E^{1,1} = E^{1,1} &\implies \operatorname{tr}(E^{1,2}E^{2,1}E^{1,1}) = \operatorname{tr} E^{1,1} = 1 \\ E^{2,1}E^{1,2}E^{1,1} = E^{2,2}E^{1,1} = 0 &\implies \operatorname{tr}(E^{1,2}E^{2,1}E^{1,1}) = 0 \end{aligned}$$

2.3 Trace d'un endomorphisme

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, les matrices $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables et donc leurs traces sont égales, ce qui permet la

Définition 2.3 (Trace d'un endomorphisme)**.**
On appelle *trace d'un endomorphisme* la trace de l'une quelconque de ses matrices.

$$\boxed{\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}\big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)\big)}$$

Remarque. tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E) = \ker(\operatorname{tr}) \oplus \mathsf{K} I_E$

Proposition 2.4 (Trace d'un projecteur)**.**
La trace d'un projecteur est égale son rang.

Démonstration. Si p est un projecteur et $\mathcal{B}$ une base adaptée la décomposition $E = \ker(I_E - p) \oplus \ker p$, la matrice de p relativement cette base est

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0_{r,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{n-r,r} & \vdots & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\operatorname{tr} p = r = \operatorname{rg} p$. cqfd

Cette proposition ne caractérise pas les projecteurs : $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ a une trace et un rang égaux 2, mais ne peut être un projecteur car tout projecteur de rang maximum est l'identité.

Chapitre 2

Déterminant

Sommaire

1 Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et u un endomorphisme de E représenté par la matrice A.

Définition 1.1 (Déterminant d'un endomorphisme)**.**
Le scalaire $det(A)$ est appelé *déterminant* de l'endomorphisme u et noté $\det u$.

Noter bien que $detu$ ne dépend pas de la matrice A qui le represente, donc ne dépend pas de la base choisie pour le calculer.
Le calcul technique est détaillé à l'ampphi et ne sera pas repris ici que partiellement.

Corollaire (Expression du déterminant d'un endomorphisme)**.**
Si $\mathcal{B}$ est une base (quelconque) de E, le déterminant de u se calcule par

$$\boxed{\det u = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n)\big)}$$

Démonstration. On utilise $f = \det_{\mathcal{B}}$ et $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{B}$ dans la formule (**??**). cqfd

Remarque. L'expression du déterminant dans la formule précédente, est indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Théorème 1.1 (Propriétés du déterminant d'un endomorphisme)**.**
Si E est un K-espace vectoriel de dimension n, on a

(*i*) $\det I_E = 1$ *;*
(*ii*) $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathsf{K},\ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ *;*
(*iii*) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

Démonstration. Utilisons l'expression du déterminant d'un endomorphisme relativement une base ;

(*i*) $\det(I_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$;

(*ii*) $\det(\lambda u) = \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda u(\mathbf{e}_1), \ldots, \lambda u(\mathbf{e}_n)\big) = \lambda^n \det\big(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n)\big) = \lambda^n \det u$;

(*iii*) la formule (**??**) appliquée $f = \det_{\mathcal{B}}$ et $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \big(v(\mathbf{e}_1), \ldots, v(\mathbf{e}_n)\big)$ donne

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}\Big(u\big(v(\mathbf{e}_1)\big), \ldots, u\big(v(\mathbf{e}_n)\big)\Big) = \det u \det_{\mathcal{B}}\big(v(\mathbf{e}_1), \ldots, v(\mathbf{e}_n)\big) = \det u \ \det v$$

cqfd

Remarque. En général, $\det(u + v)$ est différent de $\det u + \det v$. Donnons un exemple : si $n \geqslant 2$, $\det(I_E + I_E) = \det(2I_E) = 2^n \neq \det I_E + \det I_E = 2$.

Théorème 1.2 (Caractérisation des automorphismes)**.**
Soit u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$; u est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul, et, dans ce cas, $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$.

$$\boxed{u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0 \text{ et, dans ce cas, } \det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E ; u est inversible si, et seulement si, $n = \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\big(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n)\big)$, *i.e.* si, et seulement si, $u(\mathcal{B})$ est une base de E, soit si, et seulement si, $0 \neq \det_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B}) = \det u$.
Si u est inversible, $u^{-1} \circ u = I_E$; on obtient $1 = \det I_E = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u^{-1}) \det u$, ce qui montre que $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$. cqfd

2 Déterminant d'une matrice carrée

Considérons une matrice carrée M d'ordre $n \geqslant 1$ coefficients dans K ; on note $a_{i,j}$ le terme général de cette matrice et C_1,...,C_n ses vecteurs colonnes ; on écrira indifféremment : $M = [a_{i,j}] = (C_1, \ldots, C_n)$.
Appelons $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathsf{K})$; le scalaire $a_{i,j}$ s'interprète comme la composante du vecteur colonne C_j suivant E_i relativement la base canonique $\mathcal{C}$, ce qui donne la

Définition 2.1 (Déterminant d'une matrice carrée)**.**
On appelle *déterminant* de la matrice carrée $M = [a_{i,j}]$, et l'on note $\det M$, le déterminant $\det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, C_n)$ de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathsf{K})$.

Théorème 2.1 (Déterminant de la transposée d'une matrice)**.**
Si $M = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K})$*, on a*

$$\det M = \det {}^tM = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^{n} a_{s(j),j} = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{i=1}^{n} a_{i,s(i)}$$

Démonstration. Le vecteur colonne C_j a pour coordonnées $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathsf{K})$. En changeant M en ${}^tM$, on passe de l'une des expressions du déterminant l'autre. cqfd

2.1 Propriétés

Théorème 2.2 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.**
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale principale.

Démonstration. Si M est une matrice triangulaire supérieure, on utilise l'expression (**??**) du déterminant d'un système triangulaire de vecteurs.
Si M est une matrice triangulaire inférieure, ${}^tM$ est une matrice triangulaire supérieure ; l'égalité $\det M = \det {}^tM$ donne le résultat. cqfd

Théorème 2.3 (Déterminant de la matrice d'un endomorphisme)**.**
Si u est un endomorphisme d'un K*-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$, le déterminant de u est le déterminant de la matrice de u dans une base quelconque de E.*

$$\boxed{\text{Pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E, \quad \det u = \det\big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)\big)}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E ; les composantes du vecteur colonne C_j de $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)$ sont les composantes de $u(\mathbf{e}_j)$ dans $\mathcal{B}$, ce qui donne l'égalité $\det\big(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n)\big) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, C_n) = \det\big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)\big)$. cqfd

Théorème 2.4. *Si n est un entier positif, on a*

(*i*) $\det I_n = 1$;
(*ii*) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K}),\ \forall \lambda \in \mathsf{K},\ \det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$;
(*iii*) $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathsf{K})^2,\ \det(MN) = \det M \times \det N$;
(*iv*) $M \in \mathcal{GL}_n(\mathsf{K}) \iff \det M \neq 0$ *et, dans ce cas,* $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$.

Démonstration. C'est la traduction matricielles des théorèmes 1.1 et 1.2 consacrés aux déterminants d'endomorphismes. cqfd

Proposition 2.5 (Déterminant de matrices semblables)**.**
Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ et donc $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$. cqfd

Remarques.
Si M et N sont deux matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, $\det(M + N)$ est (presque) toujours différent de $\det M + \det N$.
L'application det est une application continue sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$, car application polynomiale en les composantes des matrices. On en déduit que $\mathcal{GL}_n(\mathsf{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$ comme image réciproque de la partie ouverte $\mathsf{K} \setminus \{0\}$ par l'application continue det.

2.2 Règles de calcul du déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice carrée est une application n-linéaire alternée des *vecteurs colonnes*, et donc

— si on échange deux colonnes d'une matrice, le déterminant se change en son opposé ;
— le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun de ses vecteurs colonnes ;
— on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant l'un de ses vecteurs colonnes, une combinaison linéaire des *autres* vecteurs colonnes ;
— le déterminant d'une matrice est nul si l'un des vecteurs colonnes est nul, ou si l'un des vecteurs colonnes est combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes.

Puisque le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, on peut remplacer « vecteur colonne » par « vecteur ligne » dans les propriétés précédentes.

3 Développement d'un déterminant suivant une rangée

3.1 Mise en place

Soient $M = [a_{i,j}] = (C_1, \ldots, C_n)$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$, $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathsf{K})$; pour $j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_i$.

Le déterminant de M se développe suivant son j^{e} argument en utilisant la linéarité et l'on a

$$\det M = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} E_k, \ldots, C_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, E_k, \ldots, C_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} A_{k,j}$$

o les déterminants $A_{k,j}$ s'exprime par

$$A_{k,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & 0 & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,j-1} & 1 & a_{k,j+1} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & 0 & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

soit

$$A_{k,j} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 1 & a_{k,1} & \cdots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

en effectuant $(j-1)$ transpositions de colonnes

ce qui donne

$$A_{k,j} = (-1)^{(j-1)+(k-1)} \begin{vmatrix} 1 & a_{k,1} & \cdots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

en effectuant $(k-1)$ transpositions de lignes

$$= (-1)^{j+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j+k} \det M_{k,j}$$

Ainsi $A_{k,j} = (-1)^{k+j} \det M_{k,j}$ o $M_{k,j}$ est la matrice déduite de M par suppression de la k^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

Définitions 3.1 (Mineur, cofacteur)**.**
Si $M = [a_{i,j}]$ est une K-matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$, on appelle

— *mineur* relatif l'élément $a_{i,j}$, le déterminant de la matrice carrée $M_{i,j}$ d'ordre $(n-1)$ et déduite de M par la suppression de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne ;

— *cofacteur* de $a_{i,j}$, le scalaire $(-1)^{i+j}\det M_{i,j}$.

Théorème 3.1 (Développement du déterminant suivant une rangée)**.**
Si $M = [a_{i,j}]$ est une K*-matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ et $A_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$, alors, pour tout i et tout j dans $[\![1, n]\!]$, on a*

— $\det M = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}A_{k,j}$, *développement du déterminant suivant la j^{e} colonne ;*

— $\det M = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{i,k}$, *développement du déterminant suivant la i^{e} ligne.*

Démonstration. La première formule a été démontrée. Pour la seconde, on utilise l'égalité du déterminant de M et de sa transposée, et le développement de $\det {}^tM$ par rapport la i^{e} colonne de ${}^tM$, *i.e.* la i^{e} ligne de M. cqfd

3.2 Matrice des cofacteurs

Définition 3.2 (Matrice des cofacteurs)**.**
Si $M = [a_{i,j}]$ est une K-matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$, on appelle *matrice des cofacteurs* ou *comatrice* de M, et on note $\operatorname{Com} M$, la matrice de terme général $A_{i,j}$, le cofacteur relatif $a_{i,j}$.

$$\boxed{\operatorname{Com} M = [A_{i,j}] = \left[(-1)^{i+j}\det M_{i,j}\right]}$$

Théorème 3.2. *Pour toute* K*-matrice carrée M d'ordre $n \geqslant 2$, on a*

$$\boxed{M\,{}^t(\operatorname{Com} M) = {}^t(\operatorname{Com} M)\,M = (\det M)I_n}$$

Démonstration. Si, dans M, on remplace la j^{e} colonne $(a_{k,j})_k$ par $(b_k)_k$, le déterminant de cette nouvelle matrice s'écrit $\sum_{k=1}^{n} b_kA_{k,j}$: c'est le développement du déterminant par rapport sa j^{e} colonne.
Si la nouvelle colonne $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est la i^{e} colonne de M, le déterminant est nul si $i \neq j$, et vaut $\det M$ si $i = j$, ce qui s'écrit

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}A_{k,j} = \delta_{j,i}(\det M)$$

ou encore, puisque $({}^t(\operatorname{Com} M)\,M)_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j}a_{k,i}$,

$${}^t(\operatorname{Com} M)\,M = (\det M)I_n$$

Par une méthode analogue, que je vous encourage rédiger, on montre que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k} = \delta_{i,j}(\det M)$$

ce qui revient écrire

$$M\,{}^t(\operatorname{Com} M) = (\det M)I_n$$

cqfd

Remarque. $M \mapsto \mathrm{Com}\, M$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$dans $\mathcal{M}_n(\mathsf{K})$, car les composantes de $\mathrm{Com}\, M$ sont polynomiales en les coefficients de M.

Corollaire (Inverse d'une matrice carrée)**.**
Si M est une matrice carrée inversible d'ordre $n \geqslant 2$, on a

$$\boxed{M \in \mathcal{GL}_n(\mathsf{K}) \implies M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t(\mathrm{Com}\, M)}$$

Remarques. Exceptés les cas $n = 2$ et $n = 3$, cette formule ne peut servir au calcul numérique de l'inverse car elle comporte trop d'opérations.

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathsf{K}) \implies M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Par contre, elle est utile dans des questions théoriques ; par exemple, $M \mapsto M^{-1}$ est une bijection continue de $\mathcal{GL}_n(\mathsf{K})$ (c'est même une involution) car produit de deux applications continues.

4 Exemple de calcul de déterminant

4.1 Déterminant de Vandermonde

Soient $n > 1$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{K}^n$; alors

$$\boxed{V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)}$$

Démonstration. S'il existe $i < j$ avec $a_i = a_j$, le déterminant possède deux lignes identiques ; il est donc nul et la formule est vérifiée. On envisage maintenant le cas o les a_i sont distincts deux deux et on effectue une démonstration par récurrence sur n.
Pour $n = 2$, $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$.
En développant $P(x) = V(a_1, \ldots, a_n, x)$ par rapport la dernière ligne, on remarque que P est un polynme de degré n et de coefficient dominant $V(a_1, \ldots, a_n)$; on remarque aussi que $P(a_i) = 0$ (si $x = a_i$, le déterminant possède deux lignes identiques) et P admet n racines distinctes. Ainsi,

$$P(X) = V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

d'o le résultat en remplaant X par a_{n+1}.
Le passage du rang n au rang $n+1$ se démontre aussi en manipulant les colonnes de la faon suivante :

$$C_{k+1} \leftarrow C_{k+1} - a_1 C_k \quad \text{pour } k \text{ variant de } n \ \ 1$$

On a donc

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_2^n-a_1a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n+1}-a_1 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}-a_1a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^n-a_1a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$
$$\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\,V(a_2,\dots,a_{n+1}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)$$

cqfd

5 Résolution des systèmes linéaires

5.1 Quelques notations

Soient n et p deux entiers au moins égaux 1, et $\mathcal{E} = (E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathsf{K})$. toute matrice $M = [a_{i,j}] = (C_1,\dots,C_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$, on associe l'application linéaire u de K^p vers K^n telle que :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = M$$

Pour $j \in [\![1,p]\!]$, on note $\mathbf{c}_j = (a_{1,j},\dots,a_{n,j}) = {}^tC_j \in \mathsf{K}^n$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) = {}^tB \in \mathsf{K}^n$ et $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_p) = {}^tX \in \mathsf{K}^p$ divers vecteurs.
Tout système linéaire $(\mathcal{L})$ de n équations p inconnues peut s'écrire de manière

— analytique : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$

— vectorielle : $\sum_{j=1}^{p} x_j\mathbf{c}_j = \mathbf{b}$ ou encore $\sum_{j=1}^{p} x_jC_j = B$

— matricielle : $MX = B$;

— fonctionnelle : $u(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Les rangs de M, de u, de la famille de vecteurs $(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_p)$ ou de la famille $(C_1,\dots,C_p)$ sont égaux ; cet entier est noté r et appelé *rang du système linéaire* $(\mathcal{L})$.

5.2 Cas des systèmes de Cramer

Définition 5.1 (Systèmes de Cramer)**.**
Un système linéaire $(\mathcal{L})$ de n équations n inconnues est appelé *système de Cramer* si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

(*i*) $n = p = r$;
(*ii*) $M \in \mathcal{GL}_n(\mathsf{K})$;
(*iii*) u est inversible.

Théorème 5.1 (Formules de Cramer)**.**
Avec les notations précédentes, l'unique solution d'un système de Cramer est donnée par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = \frac{\det M_j}{\det M}$$

o M_j est la matrice déduite de M en remplaant le vecteur colonne C_j par le second membre B.

Démonstration. $X = {}^t(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{L})$ si, et seulement si, $\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B$. On a donc

$$\begin{aligned}
\det M_j &= \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^{p} x_k C_k, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \ldots, C_n) \qquad \text{(det est } n\text{-linéaire)} \\
&= x_j \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \qquad \text{(det est alterné)} \\
&= x_j \det M
\end{aligned}$$

Puisque $\det M \neq 0$, on a le résultat annoncé. cqfd

5.3 Cas des systèmes homogènes

Un système linéaire est dit *homogène* si le second membre **b** est nul ; il admet toujours au moins une solution : la solution nulle.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de K^p de dimension $p - r$, c'est $\ker u$; il suffit d'en exhiber une base.è

A) Cas particulier : $p = n + 1$, $r = n$

Les solutions d'un système linéaire homogène de n équations $n+1$ inconnues et de rang maximum n constituent une droite vectorielle ; il suffit donc d'exhiber une solution non nulle.
Appelons M_j la matrice carrée d'ordre n déduite de M par suppression de la j^e colonne et $\tilde{M}$ la matrice carrée d'ordre $n + 1$ obtenue en ajoutant M la ligne $(b_1, \ldots, b_{n+1})$; $\det M_j$ est le mineur de $\tilde{M}$ relatif b_j et le développement de $\tilde{M}$ suivant sa dernière ligne donne

$$\det \tilde{M} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j (-1)^{n+1+j} \det M_j$$

Au lieu de compléter M par la ligne $(b_j)_j$, complétons-la par sa i^e ligne $(a_{i,j})_j$; dans ce cas, $\tilde{M}$ possède deux lignes identiques et l'égalité précédente devient

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ 0 = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} (-1)^{n+1+j} \det M_j = (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} (-1)^j \det M_j$$

ce qui signifie que $\big((-1)^j \det M_j\big)_j$ est une solution du système, solution non nulle puisque M est de rang n.Cette solution constitue donc une base de la droite vectorielle des solutions.

B) Intersection de deux plans de K^3

Considérons le système homogène

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ (\mathcal{P}_2) : u_2x + v_2y + w_2z = 0 \end{cases}$$

avec $(u_i, v_i, w_i) \neq \mathbf{0}$ pour $i = 1$ et $i = 2$. On pose

$$d_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix},\ d_2 = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix},\ d_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

En développant Δ_1 et Δ_2 suivant leur dernière ligne, on trouve $\Delta_1 = 0 = u_1d_1 + v_1d_2 + w_1d_3$ et $\Delta_2 = 0 = u_2d_1 + v_2d_2 + w_2d_3$.
Si les deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont identiques, alors $(d_1, d_2, d_3) = \mathbf{0}$. Sinon, (d_1, d_2, d_2) dirige la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Dans R^3 euclidien, le vecteur (d_1, d_2, d_3) s'interprète comme le produit vectoriel des vecteurs (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) normaux respectivement $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

6 Déterminant et rang

Le rang d'une matrice $M = [a_{i,j}] = (C_1, \ldots, C_p) = {}^t(L_1, \ldots, L_n) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ est le rang de ses vecteurs colonnes $(C_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ ou celui de ses vecteurs lignes $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ car le rang d'une matrice est égal celui de sa transposée ; on a donc :

$$\operatorname{rg} M \leqslant \inf(n, p)$$

Définition 6.1 (Matrice extraite)**.**
Si I est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$ et J une partie non vide de $[\![1, p]\!]$, on appelle *matrice extraite de M associée* I et J, la matrice $R = [a_{i,j}]$ o $i \in I$ et $j \in J$.

Lemme 6.1. *Le rang d'une matrice extraite de M est inférieur ou égal au rang de M.*

Démonstration. Soit R une matrice extraite de M associée I et J. Considérons la matrice Q extraite de M et associée $[\![1, n]\!]$ et J ; les vecteurs colonnes $(C_j)_{j\in J}$ de Q constituent une sous-famille des vecteurs colonnes de M, donc $\operatorname{rg} Q \leqslant \operatorname{rg} M$. De même, les vecteurs lignes $(L_i)_{i\in I}$ de R constituent une sous-famille des vecteurs lignes de Q, d'o $\operatorname{rg} R \leqslant \operatorname{rg} Q$, et le résultat. cqfd

Théorème 6.2 (Caractérisation du rang d'une matrice)**.**
Le rang d'une matrice non nulle est l'ordre maximal des matrices carrés inversibles extraites.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ une matrice non nulle.
L'ensemble des ordres des matrices carrées inversibles extraites de M n'est pas vide (il contient 1 puisque M n'est pas la matrice nulle), et est majoré par $\operatorname{rg} M$ d'après le lemme. On note r son plus grand élément ; on a donc $1 \leqslant r \leqslant \operatorname{rg} M$.

De la famille $(C_1, \dots, C_p)$ des vecteurs colonnes de M, on peut extraire une sous-famille libre $(C_j)_{j\in J}$ de cardinal $\operatorname{rg} M$; on note Q la matrice extraite de M associée $[\![1, n]\!]$ et J, et $rgM = \operatorname{rg} Q$. Des vecteurs lignes $(L_1, \dots, L_n)$ de Q, on peut encore extraire une sous-famille libre $(L_i)_{i\in I}$ de cardinal $\operatorname{rg} Q$; on note R la matrice extraite de M et associée I et J et $\operatorname{rg} R = \operatorname{rg} Q$.
R est une matrice carrée de rang maximum ($\#I = \#J = \operatorname{rg} R = \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} M$), donc une matrice inversible. En conséquence, $r \geqslant \operatorname{rg} M$.
Finalement r est égal au rang de M. cqfd

Corollaire (Caractérisation des familles libres)**.**
Si $\mathcal{F} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p)$ est une famille de p vecteurs d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n, si $M = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ est la matrice des composantes de $\mathcal{F}$ relatives une base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{F}$ est une famille libre si, et seulement si, il existe une matrice carrée d'ordre p, extraite de M et de déterminant non nul.