❖ مســـــــألة

I)- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x^2+\ln\frac{x}{2}$.

1)- دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x\in]0,+\infty[,g'(x)=\left(x^2+\ln\frac{x}{2}\right)'=2x+\frac{1}{x}>0$$

إذن g تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

2)-أ- لنبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

لدينا: g متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ،

إذن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $g(]0,+\infty[)=]\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)[$

و لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+\ln\frac{x}{2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln\frac{x}{2}\right)=+\infty$

و بالتالي: $g(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$.و بما أن $0\in]-\infty,+\infty[$ فإنه $\exists!\alpha\in]0,+\infty[\,/\,g(\alpha)=0$

ولدينا: $g(1)=1>0$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2\ln2<0$ ، أي $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1)<0$ ، إذن $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]0,\alpha[$ و $]\alpha,+\infty[$.

لدينا: g تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

إذن $\forall x\in]0,\alpha[,g(x)<g(\alpha)=0$ و $\forall x\in]\alpha,+\infty[,g(x)>g(\alpha)=0$.

II)- لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2-2\ln x},x>0$ و $f(0)=0$.

1)-أ- لنبين أن الدالة f متصلة في الصفر على اليمين.

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ ، ومنه f متصلة على يمين الصفر.

ب- دراسة قابلية اشتقاق f في الصفر على اليمين

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3-2x\ln x}$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x^3-2x\ln x=0^+-0^-=0^+$

إذن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين.

التأويل الهندسي.

لدينا: f متصلة في الصفر على اليمين و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، إذن منحنى الدالة f

يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى،على يمين النقطة O .

ج- دراسة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-2\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ ، (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$)

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، و بالتالي محور الأفاصيل هو مقارب أفقي لمنحنى f بجوار $+\infty$.

2)-أ-حساب $f'(x)$ ، لكل $\forall x>0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\ f'(x)=-\frac{\left(x^2-2\ln x\right)'}{\left(x^2-2\ln x\right)^2}=-\frac{2x-\frac{2}{x}}{\left(x^2-2\ln x\right)^2}$$

$$=-2\frac{x^2-1}{x\left(x^2-2\ln x\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{x}\left(f(x)\right)^2$$

ب- جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ هي إشارة $1-x^2$ ،ومنه:

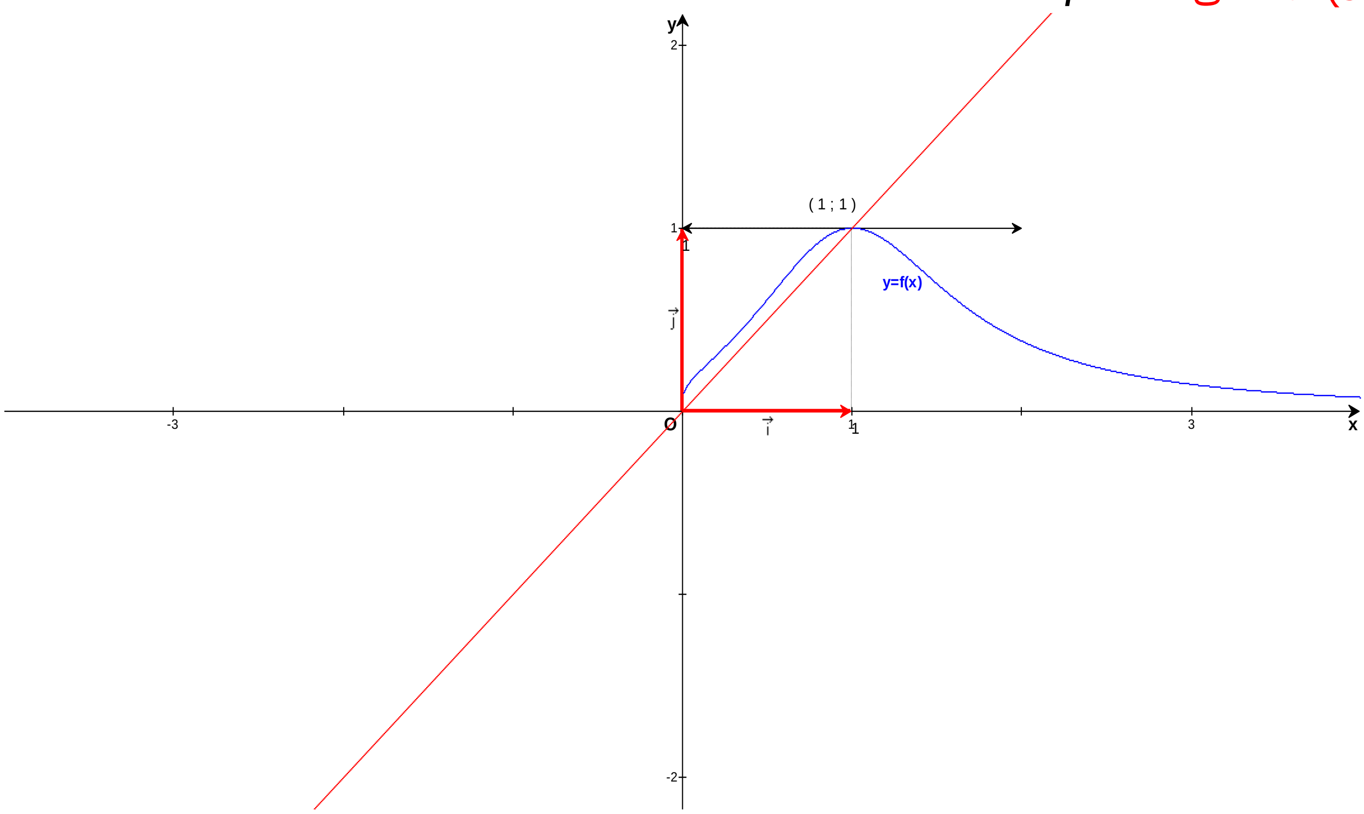
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

استنتج أن $\forall x\in[0,+\infty[\,,0\leq f(x)\leq 1$.

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن $\forall x\in[0,+\infty[\,,0\leq f(x)\leq 1$.

ملاحظة : الدالة f تقبل قيمة قصوى عند 1 هي $f(1)=1$

3)- منحنى الدالة f :



III)- نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt, x>0$ و $F(0)=0$.

1)- لنبين أن $\forall x>0, 0\leq F(x)\leq x$:

لدينا حسب السؤال II-2-ب $\forall x\in[0,+\infty[, 0\leq f(x)\leq 1$

إذن $\forall x>0, \int_x^{2x} 0dt\leq \int_x^{2x} f(t)dt\leq \int_x^{2x} dt$ أي $\forall x>0, 0\leq F(x)\leq x$

لنستنتج أن F متصلة في الصفر على اليمين:

لدينا: $\forall x>0, 0\leq F(x)\leq x$، إذن $0\leq \lim_{x\to0^+} F(x)\leq \lim_{x\to0^+} x$

ومنه $\lim_{x\to0^+} F(x)=0=F(0)$ أي F متصلة في الصفر على اليمين.

2)-أ- بين أن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{x}{x^2-2\ln x}\leq F(x)\leq \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}$.

لدينا : $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$، $[x,2x]\subset[0,1]$. و بما أن f تزايدية على المجال $[0,1]$ فإن:

$\forall t\in[x,2x], f(x)\leq f(t)\leq f(2x)$، إذن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \int_x^{2x} f(x)dt\leq F(x)\leq \int_x^{2x} f(2x)dt$.

إذن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, xf(x)\leq F(x)\leq xf(2x)$

أي: $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{x}{x^2-2\ln x}\leq F(x)\leq \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}$.

ب- استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و أن $F_d'(0)=0$.

لدينا: $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{x}{x^2-2\ln x}\leq F(x)\leq \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}$، إذن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{1}{x^2-2\ln x}\leq \frac{F(x)}{x}\leq \frac{1}{4x^2-2\ln 2x}$

و لدينا: $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{4x^2-2\ln 2x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2-2\ln x}\right)=0$، و بالتالي: $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=0$.

إذن F قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و $F_d'(0)=0$.

3)-أ- لنبين أن $\forall x\geq 1, \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}\leq F(x)\leq \frac{x}{x^2-2\ln x}$.

لدينا : $\forall x\in[1,+\infty[$، $[x,2x]\subset[1,+\infty[$. و بما أن f تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ فإن:

$\forall t\in[x,2x], f(2x)\leq f(t)\leq f(x)$، إذن $\forall x\geq 1, \int_x^{2x} f(2x)dt\leq F(x)\leq \int_x^{2x} f(x)dt$.

إذن $\forall x\geq 1, xf(2x)\leq F(x)\leq xf(x)$

أي: $\forall x\geq 1, \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}\leq F(x)\leq \frac{x}{x^2-2\ln x}$.

ب- لنستنتج أن $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$.

لدينا $\forall x\geq 1, \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}\leq F(x)\leq \frac{x}{x^2-2\ln x}$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4x^2-2\ln 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x\left(1-2\frac{\ln 2x}{(2x)^2}\right)}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-2\ln 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(1-8\frac{\ln 2x}{(2x)^2}\right)}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$.

4)-أ- لنبين أن $\forall x>0, F'(x)=-2g(x)f(x)f(2x)$.

الدالة $f:t\mapsto f(t)$ متصلة على $]0,+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية G على $]0,+\infty[$،

و لدينا $\forall x>0, F(x)=G(2x)-G(x)$.

إذن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x>0, F'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2f(2x)-f(x)$$

$$=\frac{2}{4x^2-2\ln 2x}-\frac{1}{x^2-2\ln x}=\frac{2(x^2-2\ln x)-(4x^2-2\ln 2x)}{(4x^2-2\ln 2x)(x^2-2\ln x)}$$

$$=\frac{-2x^2-2\ln x+2\ln 2}{(4x^2-2\ln 2x)(x^2-2\ln x)}=-2g(x)f(x)f(2x)$$

ب- جدول تغيرات الدالة F .

لدينا: إشارة $F'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ (لأن f موجبة)

و حسب I-2-ب فإن جدول تغيرات f هو :

x	0		α		$+\infty$
$F'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	0

5)- تحديد قيمة العدد λ بحيث تكون المساحة $A(\lambda)$ قصوية.

لدينا $\forall \lambda>0, A(\lambda)=\int_{\lambda}^{2\lambda} f(t)dt=F(\lambda)$

و حسب السؤال السابق ، F تقبل قيمة قصوى عند α هي $F(\alpha)$.

أي أن المساحة $A(\lambda)$ تكون قصوية إذا كان $\lambda=\alpha$.

IV)- لتكن $(I_n)_{n>0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}^*, I_n=\int_n^{n+1} F(t)dt$.

1)- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\le I_n\le F(\alpha)$.

لدينا من خلال جدول تغيرات الدالة F : $\forall t\in[0,+\infty[, 0\le F(t)\le F(\alpha)$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\le \int_n^{n+1} F(t)dt\le \int_n^{n+1} F(\alpha)dt$

و بالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\le I_n\le F(\alpha)$.

2)-أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists c_n\in[n,n+1] / I_n=F(c_n)$.

الدالة F متصلة على المجال $[n,n+1]$، لكل n من $\mathbb{N}^*$.

و القيمة المتوسطة للدالة F على $[n,n+1]$ هي $\mu_n=\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} F(t)dt=\int_n^{n+1} F(t)dt=I_n$

و حسب مبرهنة المتوسط ، $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists c_n\in[n,n+1] / \mu_n=F(c_n)$.

أي $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists c_n\in[n,n+1] / I_n=F(c_n)$.

ب- تحقق أن المتتالية $(c_n)_{n>0}$ تزايدية ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} c_n$.

لدينا $c_{n+1}\in[n+1,n+2]$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*, c_n\in[n,n+1]$ ، إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*, c_n\le c_{n+1}$.

و لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\le c_n$ ، إذن $\lim_{n\to+\infty} c_n=+\infty$

3)-أ- بين أن المتتالية $(I_n)_{n>0}$ تناقصية:

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, I_{n+1}-I_n=F(c_{n+1})-F(c_n)$.

و بما أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, c_{n+1}\ge c_n\ge 1\ge\alpha$ و F تناقصية على $[1,+\infty[$ فإن $F(c_{n+1})\le F(c_n)$

أي $\forall n\in\mathbb{N}^*, I_{n+1}-I_n\le 0$، إذن $(I_n)_{n>0}$ تناقصية .

استنتاج تقارب المتتالية $(I_n)_{n>0}$

لدينا $(I_n)_{n>0}$ تناقصية و مصغورة بالصفر ، إذن $(I_n)_{n>0}$ متقاربة.

ب- لنبين أن $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists c_n\in[n,n+1] / I_n=F(c_n)$

إذن $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty} F(c_n)$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty} c_n=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty} F(c_n)=0$.