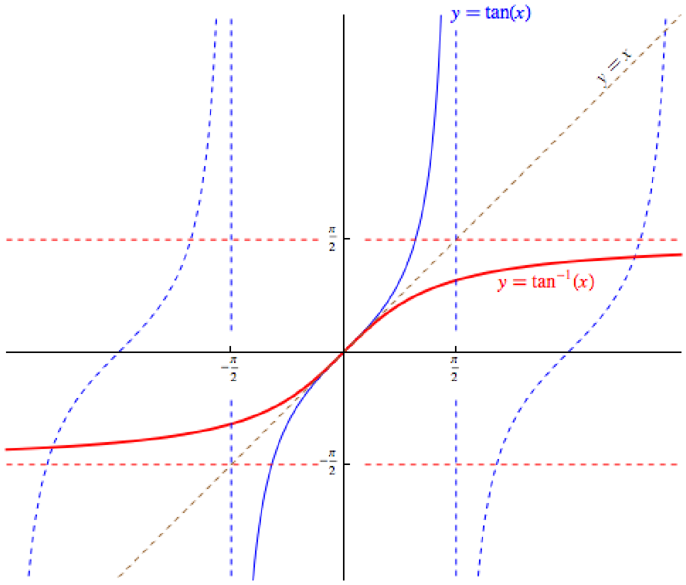
Omar Abidar سلسلة omar.drarga@gmail.com

2 BAC SM A et B

Arctan

AGADIR

تعريف : الدالة العكسية لقصور الدالة tan على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ تسمى دالة القوس الظل ونرمز لها بالرمز Arctan



نتــــائج :

- ✓ الدالة Arctan معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
- ✓ الدالة Arctan متصلة على $\mathbb{R}$
- ✓ الدالة Arctan تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
- ✓ الدالة Arctan فردية يعني $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad \operatorname{Arctan}(-x)=-\operatorname{Arctan} x$
- ✓ $(\forall x\in\mathbb{R})\left(\forall y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \operatorname{Arctan} x=y \Leftrightarrow x=\tan y$
- ✓ $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad \tan(\operatorname{Arctan} x)=x$
- ✓ $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \operatorname{Arctan}(\tan x)=x$
- ✓ $(\forall x,y\in\mathbb{R}) \quad \operatorname{Arctan}(x)=\operatorname{Arctan}(y)\Leftrightarrow x=y$
- ✓ $(\forall x,y\in\mathbb{R}) \quad \operatorname{Arctan}(x)\prec\operatorname{Arctan}(y)\Leftrightarrow x\prec y$
- ✓ $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad (\operatorname{Arctan} x)'=\frac{x'}{1+x^2}$

Omar Abidar **سلسلة** omar.drarga@gmail.com

2 BAC SM A et B **Arctan** **AGADIR**

تمرين 01 : بسط التعبير : $f(x)=\text{Arctan}(\tan x)$ على كل من $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ و $\left]-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين 02 : أحسب مايلي :

$$A=\text{Arctan}\left[\tan\left(\frac{101\pi}{4}\right)\right]\ ,\ B=\tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ C=\text{Arctan}\left[\tan\left(\frac{2009\pi}{4}\right)\right]$$

$$C=\arctan(2)+\arctan(3)+\arctan\left(2+\sqrt{3}\right)\ ,\ D=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

تمرين 03 : أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\text{Arctan}\left(x^2+2x\right)}{x}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}x\left[2\text{Arctan}(x)-\pi\right]\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(1-x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ ,\ \lim_{x\to-\infty}x\,\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ ,\ \lim_{x\to 1}\frac{\text{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

تمرين 04 : بين أن :

$$\forall x\succ 0,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\qquad\qquad \forall x\prec 0,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\qquad\qquad \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\forall x\prec 0\qquad \text{Arctan}(x+1)-\text{Arctan}(x)=\text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

تمرين 05 :

-1 بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \sin(\text{Arctan}(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad(\forall x\in\mathbb{R})\quad \cos(\text{Arctan}(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

-2 أثبت المتساوية التالية : $(ab\prec 1):\arctan a+\arctan b=\arctan\dfrac{a+b}{1-ab}$

-3 تطبيق : أحسب $S=2\arctan\dfrac{1}{4}+\arctan\dfrac{1}{7}+2\arctan\dfrac{1}{13}$

تمرين 06 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(E_1):\arctan(x)+\arctan\left(\sqrt{3}x\right)=\frac{7\pi}{12}\qquad\qquad (E_2):\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$$

$$(E_3):\arctan(x)+\arctan\left(x\sqrt{3}\right)=\frac{7\pi}{12}\qquad\qquad (E_4):\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1)=\frac{\pi}{2}$$

تمرين 07 : $(E): \quad \arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$

1) بين المعادلة (E) تقبل حلولا موجبة

2) حل المعادلة (E)

تمرين 08 : ليكن $x,y\in\mathbb{R}$

1) بين أن: $y\geq 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x-y)\leq \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)$

2) بين أن: $y\leq 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x-y)\geq \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)$

3) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: \quad |\text{Arctan}\, x| = \text{Arctan}|x|$

4) استنتج أن: $\text{Arctan}|x-y|\leq \text{Arctan}|x|+\text{Arctan}|y|$

تمرين 09 : الهدف من هذا التمرين هو البرهان على علاقة **John MACHIN (1680-1751)**

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

1) نضع $\theta=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ ، حدد $\tan(2\theta)$ ثم $\tan(4\theta)$

2) بين أن $0\leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\leq\frac{\pi}{6}$ ثم استنتج تأطيرا ل $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$

3) استنتج علاقة John MACHIN

تمرين 10 : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $f(x)=2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan(x)$

1) أحسب $f(0)$

2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

3) ماذا تستنتج ؟

تمرين 11 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $f(x)=\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)$

1) حدد $f'(x)$ لكل x من D_f

2) استنتج أن: $f(x)=\text{Arctan}\, x-\frac{\pi}{4} \qquad \forall x\in]-1;+\infty[$

2) استنتج أن: $f(x)=\text{Arctan}\, x+\frac{3\pi}{4} \qquad \forall x\in]-\infty;-1[$

تمرين 12 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

1) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} :\quad 0 \prec f(x) \prec \frac{\pi}{2}$

2) ليكن x عنصر من $\mathbb{R}$

a) بين أن: $1 - \tan^2 f(x) = 2x \tan f(x)$

b) استنتج أن: $x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2f(x)\right)$

c) استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R} :\quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arctan}(x)$

تمرين 13 : نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي: $\forall x \in]-1;1] :\ f(x) = 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

3) بين أن : $\forall x \in]-1;1] :\quad 0 \leq f(x) \prec \pi$

4) ليكن x عنصر من $]-1;1]$

d) بين أن : $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x\left(1 + \tan^2\frac{f(x)}{2}\right)$

e) استنتج أن: $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$

تمرين 14 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بمايلي : $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

بين أن f ثابتة على مجالات و حدد في كل من هذه المجالات قيمة $f(x)$

تمرين 15 : 1) بين أن $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)\quad x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

2) استنتج النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^3}$

تمرين 16 : نعتبر الدالة العددية f بحيث: $f_m(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x+m}{1-mx}\right)$ (m بارامتر بحيث $m \in \mathbb{R}^*$)

1) حدد $f_m'(x)$ لكل x من D_{f_m}

2) بين أن $f_{-m}(x) = -f_m(-x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{m}\right\}$

ليكن $m \in \mathbb{R}^*_-$

3) بين أن $f_m(x)=\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(m)$ $\quad \forall x\in\left]\frac{1}{m},+\infty\right[$

4) بين أن $\text{Arctan}(m)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{m}\right)=-\frac{\pi}{2}$

5) استنتج أن $f_m(x)=\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(m)+\pi$ $\quad \forall\left]-\infty,\frac{1}{m}\right[$

6) استنتج أن $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)+\varepsilon\pi$ $\quad (\forall x,y\in\mathbb{R})(x\neq y)$ حيث $(\varepsilon\in\{-1,0,1\})$

تمرين 17: نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=x^3\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right)$

1) حدد D_f

2) ادرس قابلية إشتقاق f في $x_0=0$

3) بإستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $x\prec\text{Arctan}(x)\prec\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \forall x\,]0;1[$

4) استنتج أن $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\leq f(x)\leq x$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

5) بين أن $xf'(x)=3f(x)-\frac{2x^5}{1+x^4}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

6) استنتج أن $\frac{x^2}{1+x^4}\left(3\sqrt{1+x^4}-2x^2\right)\leq f'(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

7) أعط جدول تغيرات f

تمرين 18: نعتبر الدالة العددية f بحيث :
$$\begin{cases} f(x)=x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) & ,\ x\in\mathbb{R}^* \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) ادرس اتصال و قابلية إشتقاق f في 0

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) بين أن $\frac{x}{2+x^2}\prec\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

4) استنتج منحى تغيرات f

5) حدد معادلة نصفي مماسي f في O

6) أنشئ (C_f)

تمرين 19 : نعتبر الدالة العددية f بحيث : $g(x)=x\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$

1) حدد D_g

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

3) ادرس قابلية إشتقاق g على يمين في $x_0=0$

4) حدد $g'(x)$ لكل x من D_g

5) أعط جدول تغيرات g

6) بين أن $\frac{\pi}{2}x-g(x)=x\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

7) استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g)

8) بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال I يجب تحديده.

9) أنشئ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$

تمرين 20 : I- لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بمايلي $g(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x^2+1}$

أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي
$$\begin{cases} f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}-x; & x\geq 0\\ f(x)=x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right); & x\prec 0\end{cases}$$

1) أدرس اتصال الدالة f في $x_0=0$

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في 0 و أول هندسيا النتيجة

3) أعط جدول تغيرات الدالة f

4) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

5) أعط جدول تغيرات الدالة f

6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;+\infty[$

7) بين أن α يحقق $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α

8) أنشئ المنحنى (C_f)

9) بين أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $0\prec a\prec\alpha\prec b$ فإن $\frac{a}{b}\succ\frac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$

تمرين 21 : I - بين أن $1-x^2\leq\frac{1}{1+x^2}\leq 1-x^2+x^4$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي $h(x)=\text{Arctan}\,x-x+\frac{1}{3}x^3$

a) بين أن $|h'(x)|\le x^4 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

b) استنتج أن $|h(x)-h(0)|\le|x|^5 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^*)$

II- لتكن g الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بمايلي $g(x)=\frac{x}{2x^2+2x+1}-\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) أعط جدول تغيرات g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة على $[-1;+\infty[$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x}\left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)-x\right); & x\notin\{0,-1\} \\ f(0)=0 \quad \& \quad f(-1)=\frac{\pi}{2}-1 & \end{cases}$$

1) أدرس إتصال الدالة f في $[-1;+\infty[$

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في 0 وعلى اليمين في -1

3) أعط جدول تغيرات الدالة f

4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq-\frac{3}{4}$ و $f(\alpha)\simeq\frac{2}{3}$)

تمرين 22 : **I**- نعتبر الدالة f المعرفة $[0;+\infty[$ على بمايلي : $f(x)=2\,\text{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to0}\frac{\text{Arctan}\,x}{x}$

2) بين أن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة

3) أعط جدول تغيرات f

4) أنشئ (C_f)

II-لتكن g قصور f على المجال $I=[1;+\infty[$

1) بين أن g تقابل من $I=[1;+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

2) حدد تعبير g^{-1} لكل x من J

3) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;2]$

III- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن : $f(2) \succ \frac{\pi}{3}$

2) بين أن : $1 \le u_n \le 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) بإستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

4) استنتج أن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

تمرين 23 : I- لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :
$$\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \ x \prec -2 \\ f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{x+2}\right) & ; \ x \ge -2 \end{cases}$$

1) أدرس إتصال الدالة f في $x_0 = -2$

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f في $(-2)^-$

3) بين أن $\lim_{x \to -2^+} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{\alpha}{\tan^2(\alpha)}$

4) استنتج أن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في (-2)

5) أعط جدول تغيرات الدالة f

6) بين أن $f(x) - (2x+3) \succ 0$ $\forall x \in]-\infty; -2[$

7) أنشئ المنحنى (C_f)

II-لتكن g قصور f على المجال $I =]-\infty; -2[$

1) بين أن g تقابل من $I = [1; +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

2) حدد تعبير g^{-1} لكل x من J

III-لتكن h قصور f على المجال $[0; 2]$

و المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = h(u_n) \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن $\text{Arctan}(x) \le x$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

2) بين أن $1 \prec u_n \le 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) بين أن المتتالية العددية (u_n) تناقصية قطعا

4) بين أن المعادلة $h(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; 2[$

5) بين أن $h([0; 2]) \subset [0; 2]$

6) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

تمرين 24 : لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي
$$\begin{cases} \varphi(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1) أدرس إتصال الدالة φ في $x_0 = 0$
2) أدرس زوجية الدالة φ
3) بين أن φ رتيبة قطعا على $\mathbb{R}^+$
4) بين أن φ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J يجب تحديده
5) حدد الدالة العكسية $\varphi^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 25 : لتكن g الدالة المعرفة بمايلي :
$$\begin{cases} g(x) = -\sqrt[3]{1-x^3} & ; \ x \leq 1 \\ g(x) = 2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right) & ; \ x \succ 1 \end{cases}$$

1. حدد D_g
2. أحسب نهايات الدالة g عند محدات D_g
3. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g)
4. أدرس قابلية إشتقاق الدالة g في 1 و أول هندسيا النتيجة
5. أعط جدول تغيرات الدالة g
6. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g)
7. بين أن النقطة $A(0;-1)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g)
6) بين أن g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J يجب تحديده
7) حدد الدالة العكسية $g^{-1}(x)$ لكل x من J
8. أنشئ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$

تمرين 26 : I - لتكن f الدالة المعرفة بمايلي $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)$

1. حدد D_f
2. أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$
3. أدرس قابلية إشتقاق f على اليمين في $x_0 = -1$ ثم أول هندسيا النتيجة
4. أنشئ (C_f)

II - نضع $g(x) = \dfrac{1}{9}\left[\tan(f(x)) + x\right]^3 - 2\,\text{Arctan}(x)$

1. حدد D_f

2. بين أن $g(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{3}-2\,\mathrm{Arctan}(x)\right) \quad (\forall n\in D_g)$

3. بين أن $g(\varepsilon)=0 \quad \exists!\varepsilon\in[-1;1]$

4. بين أن $|g'(x)|\le k$ $\forall x\in]-1;1[$ حيث $k\in[0;1[$ يتم تحديده

III - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي $\begin{cases}-1\le u_n\le 1\\ u_{n+1}=g(u_n)\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1. بين أن $|u_n|\le 1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2. بين أن $|u_{n+1}-\varepsilon|\le k|u_n-\varepsilon| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

3. استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

تمرين 27 : لتكن f الدالة المعرفة بمايلي $f(x)=\mathrm{Arctan}(3x)+2x-1$

1) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

2) بين أن المعادلة $f^{-1}(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $\alpha\in\left]0;\frac{1}{3}\right[$

3) تحقق أن $\alpha=1-\mathrm{Arctan}(3\alpha)$ و أن $\alpha\in\left]1-\frac{\pi}{4};\frac{1}{3}\right[$

4) بين $f^{-1}(x)\prec x \quad (\forall x\in]\alpha;+\infty[)$ ثم أول هندسيا النتيجة

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي $\begin{cases}u_0\succ\alpha\\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1. بين أن $u_n\succ\alpha \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2. بين أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

تمرين 28 : ليكن $x,y,z\succ 0$ بين أن $xy+yz+zx=1\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\arctan\left(\frac{1}{y}\right)+\arctan\left(\frac{1}{z}\right)=\pi$