Durée 02 heures

Exercice 01 : (03 pts)

⇨ Dans $\mathbb{R}$, on considère les sous-ensembles suivant :

$$A=[4,12] \text{ et } B=\{x\in\mathbb{R} / |x|\leq r\} \text{ Où } r\in\mathbb{R}^{*+}.$$

1)- Dans cette question , on suppose que $r=5$.

1,5 ✓ Déterminer $A\cap B$ et $A\cup B$, puis en déduire $A\Delta B$.

1,5 **2)-** Donner les valeurs possibles de r pour que $A\cap B\neq\varnothing$, puis déterminer dans ce cas $A\cup B$.

Exercice 02 : (03 pts)

1 **1)-** Montrer que : $(\forall x\in[-1,0]), 1\leq 2\sqrt{x+1}-x\leq 2$.

2)- On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f:[-1,0]\to[1,2] \\ \quad x\mapsto 2\sqrt{x+1}-x \end{array}$.

1 **a)-** Vérifier que : $(\forall x\in[-1,0]), f(x)=2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$.

1 **b)-** Soit $y\in[1,2]$. Résoudre dans $[-1,0]$ l'équation $f(x)=y$, puis en déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 03 : (08 pts)

⇨ Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x)=x^3+x^2+x \text{ et } g(x)=\sqrt{10-x}.$$

1,5 **1)-** Montrer que f n'est ni paire ni impaire .

1,5 **2)- a)-** Montrer que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2), x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$.

1 **b)-** En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1 **c)-** Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera .

1,5 **3)- a)-** Déterminer D_g et montrer que g est strictement décroissante sur $]-\infty,10]$.

1,5 **b)-** Déduire que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une solution unique que l'on déterminera (utiliser le résultat de la question **2)- c)**) .

Durée 02 heures

Exercice 04:(06 pts)

⇨ Soient f et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1} \text{ et } h(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}.$$

1,5 **1)-** Dresser le tableau de variation et le tableau de signe de f .

1 **2)- a)-** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}), h(x)=2+\left(f(x)\right)^2$.

1 **b)-** Dresser le tableau de variation de la fonction : $g: x\mapsto 2+x^2$.

1,5 **c)-** En déduire la monotonie de h sur chacun des intervalles suivants :

$\left]-\infty,\frac{-3}{2}\right]$, $\left[\frac{-3}{2},1\right[$ et $]1,+\infty[$, puis dresser son tableau de variation .

1 **3)-** Déterminer les extremums de h et leurs nature .

Exercices Bonus :

Exercice 01:(02 pts)

⇨ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to[1,+\infty[\\ n\mapsto \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \end{array}$.

1 **1)-** Montrer que f est injective .

1 **2)-** Montrer que f est non surjective .

Exercice 02:(02 pts)

⇨ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ (x,y)\mapsto 4x+7y \end{array}$.

1 **1)-** Calculer $f(-7,4)$, puis en déduire que f est non injective .

1 **2)-** Calculer $f(9,-5)$, puis montrer soigneusement que f est surjective .

Exercice 03:(02 pts)

✓ Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2 Et qui vérifient la condition suivante : $(\forall x\in D), f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$.

Fin Du Sujet .