مجموعة مدارس المعارف نيابة سلا	فرض محروس رقم 3 مدة الانجاز ساعتان	الثانية باك علوم رياضية ب ذ: يونس دلال

التمرين الأول (11ن)

نذكر بأن $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ حلقة واحدية.

نعتبر المصفوفتين $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) أ- تحقق من أن $A^2 = A + 2I$. (1.5ن)

ب- استنتج أن A تقبل مقلوبا في $M_3(\mathbb{R})$ ثم حدد A^{-1}. (1.5ن)

2)نعتبر المجموعة $E = \{M_{(a;b)} = aI + bA \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

أ- بين أن $(E; +)$ زمرة جزئية من $(M_3(\mathbb{R}); +)$. (1.5ن)

ب- بين أن E جزء مستقر في $(M_3(\mathbb{R}); \times)$. (1ن)

ج- استنتج أن $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.(1ن)

3) نعرف في $\mathbb{R}^2$ قانوني التركيب الداخليين $+$ و $\perp$ كالتالي

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 ; \forall (c;d) \in \mathbb{R}^2 \quad (a;b) + (c;d) = (a + b; c + d)$

$(a;b) \perp (c;d) = (ac + 2bd; ad + bc + bd)$

أ- احسب $(1;1) \perp (2;-1)$ (1ن)

$\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

ب- نعتبر التطبيق $M_{(a;b)} \longmapsto (a;b)$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E; +)$ نحو $(\mathbb{R}^2; +)$ و من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{R}^2; \perp)$ (2ن)

ب- استنتج بنية $(\mathbb{R}^2; +; \perp)$ (1ن).

ح- هل $(\mathbb{R}^2; +; \perp)$ جسم؟ علل جوابك. 0.5ن

التمرين الثاني(5ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): \ 3x - 5y = 13$

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) (2ن)

2) بين أن $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (5k + 1) \wedge (3k - 2) = (k - 5) \wedge 13$ (1ن)

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ االنظمة $(S)\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$ (1ن)

4) حدد الأزواج $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$. (1ن)

التمرين الثالث(4ن)

ليكن p و q عددين أوليين و مختلفين و a عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث

$$a \wedge q = 1 \text{ و } a \wedge p = 1$$

1) بين أن $a^{q-1} \wedge p = 1$ و $a^{p-1} \wedge q = 1$ (ن1)

2) بين أن $\exists c' \in \mathbb{Z}: \ a^{(p-1)(q-1)} = 1 + c'q$; $\exists c \in \mathbb{Z}: \ a^{(p-1)(q-1)} = 1 + c.p$ (ن1)

3)بين أن $\exists k \in \mathbb{Z}: c = kq$ ثم استنتج أن $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$. (ن1)

4)استنتج أنه اذاكان a عدد أولي أكبر قطعا من 3 فان 6 يقسم $a^2 - 1$. (ن1)