ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 04	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية 2016/2015	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

❖ تمرين رقم 01: (3,5 نقطة)

⇦ يحتوي صندوق على كرتين بيضاوين و $n-2$ كرة حمراء غير قابلة للتمييز باللمس

(حيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 4$)، نسحب عشوائيا كرة من الصندوق نسجل لونها و لا نعيدها إليه

نكرر نفس التجربة لمرات متتالية إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة .

1)– أ– حدد $X(\Omega)$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X . — 0,25

ب– أحسب ما يلي : $p(X=1)$ و $p(X=2)$ و $p(X=3)$. — 0,75

2)– أ– بين أن : $\left(\forall k\in X(\Omega)\right); p(X=k)=\dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$. — 0,5

ب– بين أن : $E(X)=\dfrac{n+1}{3}$ (نذكر أن : $\left(\forall m\in\mathbb{N}^*\right); \sum_{k=1}^{m}k^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$) . — 0,75

3)– ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق عند الحصول على أول كرة بيضاء .

▪ أحسب الأمل الرياضي $E(Y)$ و المغايرة $V(Y)$. — 1,25

❖ تمرين رقم 02: (04 نقط)

⇦ ليكن $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ و في $IM_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -qy & x+2py \end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

1)– أ– بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(IM_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$. — 0,5

ب– نعتبر المصفوفتين $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ ، بين أن الأسرة $\mathrm{B}(I,J)$ تكون أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$ و إستنتج $\dim(E)$. — 0,5

2)– أ– بين أن : $J^2=-q.I+2p.J$ و أن E جزء مستقر من $(IM_2(\mathbb{R}),\times)$. — 0,5

ب– بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . — 0,5

3)– نفترض أن : $q=0$ ، بين أن المصفوفة J لا تقبل مقلوبا في E . — 0,5

4)– نفترض أن : $q\neq 0$.

أ– بين أن المصفوفة J تقبل مقلوبا J^{-1} في E يتم تحديده . — 0,25

ب– حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون الأسرة $\mathrm{B}'(J^{-1},J^2)$ أساسا ل $(E,+,\cdot)$. — 0,25

5)– نفترض أن : $p^2-q\geq 0$ ، بين أن الحلقة $(E,+,\times)$ غير كاملة . — 0,5

6)– بين أنه إذا كان : $p^2-q<0$ ، فإن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي . — 0,5

❖ تمرين رقم 03: (04 نقط)

I- ليكن $m \in \mathbb{C}-\{-1,1\}$ و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): iz^2+(1-i)(1+im)z+m^2-1=0$.

1)- بين أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta=-2i(m+i)^2$. — 0,25

2)- إستنتج أن حلي المعادلة (E) هما : $u=i(1+m)$ و $v=1-m$. — 0,5

3)- أكتب الحلين u و v على الشكل المثلثي في حالة $m=e^{i\theta}$ ، حيث $\theta \in]0,\pi[$. — 0,75

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، نعتبر النقط :

$A(im)$ و $B(u)$ و $C(v)$ و $D(u^2)$ و $E(w)$ ، حيث : $w=\dfrac{u^2+m}{1-i}$.

1)- حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون النقط O وB و C مستقيمية . — 0,5

2)- بين أن النقطة C هي صورة A بدوران R قياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ محددا لحق مركزه . — 0,5

3)- نفترض في كل ما يلي أن : $|m|=1$ و أن $m^2+(2+i)m+1\neq 0$.

أ- بين أن النقط A و D و E غير مستقيمية . — 0,5

ب- بين أن المثلث ADE متساوي الساقين و قائم الزاوية في E . — 0,5

ج- بين أن النقط O و A و D و E متداورة . — 0,5

❖ تمرين رقم04: (5,5 نقطة)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 61x-33y=1$.

1)- أ- بين أن العدد 61 أولي . — 0,25

ب- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) غير فارغة . — 0,25

2)- أ- باستعمال خوارزمية أقليدس بين أن الزوج $(13,24)$ حل للمعادلة (E) . — 0,5

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . — 0,5

II- في نظمة العد العشري ، نعتبر العدد الصحيح الطبيعي :

$A_n=\underbrace{11....1}_{n\ fois}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1)- أ- بين أن العدد A_{2040} يقبل القسمة على 33 . — 0,5

ب- بين أن : $9A_{2040}=10^{2040}-1$ ، ثم إستنتج أن A_{2040} يقبل القسمة على 61 . — 0,5

ج- بين أن العدد A_{2040} يقبل القسمة على 2013 . — 0,25

2)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}); A_n\equiv 0[7] \Leftrightarrow n\equiv 0[6]$. — 0,5

ب- إستنتج أن العدد A_{2016} يقبل القسمة على 7 . — 0,25

ج- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ التي من أجلها : $A_n\equiv 2[7]$. — 0,5

3)- أ- حدد في نظمة العد العشري ، عدد أرقام العدد الصحيح الطبيعي : $A=2^{561}$. — 0,25

ب- إستنتج أكبر عدد صحيح طبيعي A_n يقبل القسمة على 7 و أصغر من أو يساوي A . — 0,75

4)- ليكن $p>5$ عددا أوليا . باستعمال مبرهنة فيرما ، بين أنه : $(\exists n\in\mathbb{N}^*-\{1\}); p/A_n$. — 0,5

❖ **تمرين رقم 05:** (1,75 نقطة)

0,5 — 1)- أحسب التكامل التالي : $I=\int_0^1 \ln^2\left(1+t\right)dt$.

0,5 — 2)- بين أن : $\left(\forall\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^2\right);\left|\ln^2\left(1+x\right)-\ln^2\left(1+y\right)\right|\le 2\left|x-y\right|$.

3)- لكل $a\in\left[0,1\right]$ ولكل $n\in\mathbb{N}^*$، نضع :

$$u_n=\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k+a}{n}\right) \text{ و } v_n=u_n-\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

0,75 — ▪ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\left|v_n\right|\le\frac{2}{n}$ ، ثم أحسب نهاية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

❖ **تمرين رقم 06:** (4,75 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);\ f\left(x\right)=\ln\left(\int_0^1\frac{e^t}{x+t}dt\right).$$

0,5 — 1)- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);\ f\left(x\right)=-x+\ln\left(\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t}dt\right)$.

0,5 — 2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);\ f\left(x\right)\ge -x+\ln\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$.

0,5 — ب- إستنتج النهاية : $\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي .

0,75 — 3)- أ- بين أنه : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\exists c\in\left[x,x+1\right]\right);\ f\left(x\right)=-x+c-\ln\left(c\right)$.

0,5 — ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in\left[1,+\infty\right[\right);-\ln x\le f\left(x\right)\le 1-\ln\left(x+1\right)$.

0,5 — ج- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .

0,5 — 4)- بين أن f تناقصية على $\mathbb{R}^{*+}$ ، و ضع جدول تغيراتها .

0,5 — 5)- بين أن $\left(C_f\right)$ يقطع المحور $\left(Ox\right)$ في نقطة وحيدة أفصولها ~ بحيث : $1\le \sim \le e-1$.

0,5 — 6)- أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❖ تمرين إضافي رقم 01:

➤ On dispose de 100 dés à 6 faces dont 20 sont truqués et donnent à la face « 1 »

Une probabilité $\frac{1}{3}$ de tomber . on choisit au hasard un dé parmi les 100 , on le lance n fois et on obtient $n-1$ fois « 1 » .

✓ Avec quelle probabilité le dé choisi est-il truqué ?

❖ تمرين إضافي رقم 02:

➤ On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires , l'urne U_2 contient Quatres boules blanches et trois boules noires .

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie , on note sa Couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient .

Si la boule tirée était blanche , le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon , le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-eme tirage est blanche »

On pose , $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = p(B_n)$.

- Calculer p_1.
- Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); p_{n+1} = \frac{-6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
- En déduire la valeur de p_n, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

❖ تمرين إضافي رقم 03:

➤ On dispose de deux n boules numérotées de 1 à n et d'une boite formée de 4 Compartiments également numérotés de 1 à 4 (on suppose que $n \geq 4$) .

On lance simultanément les boules dans les 4 compartiments elles viennent se Ranger aléatoirement dans les 4 compartiments .

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules .

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer des boules fait correspondre Le nombre de compartiments restés vides .

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Déterminer $E(X)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$ puis interpréter ce résultat .

- تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .