Exercice 1 **déterminer le sens logique des propositions suivantes :**

A : $"3^{67}+1 \text{ est un nombre premier}"$. **B :** $"(\exists x\in\mathbb{Q}):\ 6x^2-5x+1<0"$

C : $"\forall x\in[1,+\infty[\ :\ -2x^2-x+1<0"$. **D :** $"(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ x<2y"$

E : $"(\exists y\in\mathbb{R})\ (\forall x\in\mathbb{R})\ yx^2+x+1>0"$. **F :** $"(\forall x\in]0,+\infty])\quad x<3x^3"$

Exercice 2 **Exprimer les propositions suivantes en utilisant les connécteurs logiques et les quantificateurs : 1) le carré de tout nombre réel non nul est strictement positif .**

2) le polynôme X^3+2X-1 **admet au moins une racine réelle .**

3) l'équation $x^2-2=0$ **n'a pas de solution dans** $\mathbb{Q}$ **. 4)** f **est une fonction constante sur** $\mathbb{R}$

5) f **est une fonction croissante sur** $\mathbb{R}$ **. 6) chaque nombre réel est majoré par un entier naturel .**

7) tout nombre réel inférieur à 2 est nécessairement inférieur à 3 .

8) pour chaque réel x **: on a** $|x+2|<3$ **si et seulement si** $x\in]-5,1[$

Exercice 3 **on considère les propositions suivantes :**

A : $(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ x^3+2x-1=0\Rightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

B : $"\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (xy+x+y<0)\Rightarrow(x>-2$ أو $y>-2)"$

C : $"\forall(x,y,a,b)\in(\mathbb{R}^*)^4\ :\ ax+by=1\Rightarrow 1\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)"$

D : $"(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ x^2-xy+y^2=0"$

E : $"\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b}=\sqrt{b+1}+\sqrt{a}\Leftrightarrow a=b"$

G : $"\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+xy+y^2\ge 0"$

1)determiner les négations des propositions A et B et C et D .

2) montrer que C est vraie et D est fausse .

3) montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que A et B sont vraies

4) montrer en utilisant un raisonnement par équivalences succéssives que E est vraie .

5) montrer en utilisant un raisonnement par disjonction des cas que G est vraie .

Exercice 4 **1) mq** $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad |x+y|\le|x|+|y|$

2)mq $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad |x+y|=|x|+|y|\Leftrightarrow xy\ge 0$

3) soit $c>0$ **. mq** $(|x+y|\le c\ \ et\ \ |x-y|\le c)\Leftrightarrow(|x|+|y|\le c)$

Exercice 5 **1) montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 2\,|\,n\Leftrightarrow 2\,|\,n^2$

2) en déduire que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

3) en déduire que $\sqrt{3}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 6 **montrer par récurrence que :**

1) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 17/3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$, **2)** $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 3^n\ge 1+2n$

3) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 3^{n+1}/5^{3^n}+1$, **4)** $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 6/n(2n+1)(7n+7)$

5) $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **6)** $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)\times4^{n+1}}{5^n}$

7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{n}k^2\times3^k=\frac{3}{2}\left(3^n(n^2-n+1)-1\right)$

8) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 7 **Résoudre dans $\mathbb{R}$:**

1) $|x+1|-2|2x-1|=3x-5-|x+2|$. **2)** $\sqrt{2-x}=2+x$

3) $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x+3}=4$ **4)** $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>1$

Exercice 8

1) montrer que : $"\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right) : \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Rightarrow x+y=0"$

2) Soient a **et** b **et** c **les mesures des côtés d'un triangle . montrer que :**

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Exercice 9 **1) montrer que :** $"\left(\forall(x,y)\in\left(]0,+\infty[\right)^2\right) : (x\neq y)\Rightarrow\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq y-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)"$

2) soient a **et** b **deux nombres réels tels que** $a+b\geq 0$ **. on considère les propositions**

p **:** $"\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\leq\frac{a^3+b^3}{2}"$ **et** q **:** $"(a+b)(a-b)^2\geq 0"$

montrer que : $p\Leftrightarrow q$ **et en déduire que** q **est vraie**

Exercice 10 **soient** a **et** x **deux nombres reels tel que** $|a|\leq 1$ **et** $|x|\leq 1$ **.**

1) mq $|ax^2+x-a|\leq|a|\times|x^2-1|+|x|$

2) en déduire que $|ax^2+x-a|\leq -x^2+|x|+1$

3) en déduire que $|ax^2+x-a|\leq\frac{5}{4}$

Exercice 12 **soient** a **et** b **et** c **trois nombres réels tel que** $a>0$ **et** $b\geq\frac{1}{8a}$ **.**

On pose : $P(x)=ax^2+bx+c$ **et** $\Delta=b^2-4ac$.

Montrer que $P(\Delta)\geq 0$

Exercice 13 **1) soit la fonction** f **définie par** $f(x)=\frac{x+4}{5x+2}$ **. on suppose que** $|x|\leq\frac{1}{10}$ **.**

a) montrer que : $|f(x)-2|\leq 6|x|$

b) en déduire que : $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ :\ |x|\leq\alpha\Rightarrow|f(x)-2|\leq\varepsilon$

2) soient α **et** β **deux éléments de l'intérvalle** $[0,1]$ **. on pose :**

$a=\alpha\beta$ **et** $b=\alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha)$ **et** $c=(1-\alpha)(1-\beta)$ **.**

a) montrer que : $b\geq 2\sqrt{a}-2a$ **et** $a+b=1-c$ **.**

b) montrer que : $a\geq\frac{4}{9}$ **ou** $b\geq\frac{4}{9}$ **ou** $c\geq\frac{4}{9}$ **.**

Exercice 14 **pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$ **on pose** $a_n=\sum_{i=1}^{n}i$ **.**

Montrer par récurrence que : $\sum_{k=1}^{n}k\times a_k=\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$