ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 02 الدورة الأولى : 2012/2011	2 باك علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير مدة الإنجاز : 04 ساعات

L'usage de la calculatrice et du téléphone portale est interdit

⇦ الإسم العائلي و الشخصي : . . . . . النقطة : . . . . . .

■ التمرين رقم 01: $(1;5pts)$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على القطعة $[0;1]$ بما يلي :

$$(\forall x \in [0;1]); f_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1 .$$

1)- ضع جدول تغيرات الدالة f_n على $[0;1]$. $(0,5pt)$

2)- إستنتج أن المعادلة : $(E): f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]0;1[$. $(0,5pt)$

3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها . $(0,5pt)$

■ التمرين رقم 02: $(02pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 1 + \operatorname{Arctan} x .$$

و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f\left(\frac{u_n}{2}\right)$.

1)- بين أن المعادلة : $(E): f(x) = 2x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ وأن $0 < \alpha < 1$. $(0,75pt)$

2)- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [0;2]$. $(0,5pt)$

3)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - 2\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - 2\alpha|$. $(0,5pt)$

4)- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . $(0,25pt)$

■ التمرين رقم 03: $(2;5pts)$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = -5x + 2\sin x .$$

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$. $(0,5pt)$

2)- بين أن : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2); |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \le \frac{1}{3}|x - y|$. $(0,5pt)$

3)- أثبت أن المعادلة : $(E): f^{-1}(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. $(0,5pt)$

4)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n) .$$

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$. $(0,5pt)$

ب- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . $(0,5pt)$

■ التمرين رقم 04: $(3;5pts)$

ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f_n(x) = -x^3 + nx^2 - 1 .$$

1)- ضع جدول تغيرات الدالة f_n على $\mathbb{R}^+$. $(0,5pt)$

2)- إستنتج أن المعادلة : $(E): f_n(x) = 0$ تقبل حلين إثنين α_n و β_n في $\mathbb{R}^+$ بحيث :

$$0 < \alpha_n < \frac{2n}{3} < \beta_n \ . \ (0,75pt)$$

3)- ضع جدولا تحدد فيه إشارة الدالة f_n على $\mathbb{R}^+$. $0,5pt$

4)- أ- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة . $(0,5pt)$

ب- أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(\sqrt{n}.\alpha_n)_{n\geq 2}$. $(0,5pt)$

5)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); n-1 \leq \beta_n < n$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{n}$. $(0,75pt)$

■ التمرين رقم 05: $(4pts)$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(0) = 0 \text{ و } (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)\operatorname{Arctan} x} .$$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. $(0,5pt)$

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر . $(0,5pt)$

3)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \dfrac{x^2\left[(3+x^2)\operatorname{Arctan} x - x\right]}{\left[(1+x^2)\operatorname{Arctan} x\right]^2}$. $(0,5pt)$

4)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \operatorname{Arctan} x > \dfrac{x}{3+x^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . $(0,5pt)$

5)- أرسم المنحنى (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(0,5pt)$

6)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) .$$

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$. $(0,5pt)$

ب- بين أن : $(\forall x \in]0;1]); f(x) < x$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(0,5pt)$

(يمكنك تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة Arctan في $[0;x]$ ، حيث $x \in]0;1]$) .

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها . $(0,5pt)$

■ **التمرين رقم 06:** $(6;5pts)$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[2;+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x\in I);f(x)=\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\ .$$

1)- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي . $(0,5pt)$

2)- أ- أدرس قابلية إشتقاق f على اليمين في $x_0=2$ ، ثم أول النتيجة هندسيا . $(0,5pt)$

ب- بين أن : $(\forall x\in]2;+\infty[);f'(x)=\dfrac{\pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{2x^2\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}$ وضع جدول تغيرات f . $(0,5pt)$

3)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(0,5pt)$

4)- بين أن f تقبل دالة عكسية g معرفة على مجال J ينبغي تحديده . $(0,5pt)$

5)- أرسم المنحنى (C_g) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(0,5pt)$

6)- أ- بين أن g قابلة للإشتقاق في $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، ثم أحسب $g'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $(0,5pt)$

ب- بين أن $\dfrac{1}{g}$ قابلة للإشتقاق على J و أن : $(\forall x\in J);\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$. $(0,5pt)$

7)- لتكن $(v_n)_{n\geq 2}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});v_n=\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\dfrac{n+1}{n}g\left(\dfrac{1}{2n}\right)\leq v_n\leq\dfrac{n+1}{n}g\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $(0,5pt)$

ب- إستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 2}$ متقاربة محددا نهايتها . $(0,5pt)$

8)- نعتبر الدالة h المعرفة على $[-1;1]$ بما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ و لتكن H الدالة الأصلية للدالة h على $[-1;1]$ و التي تحقق : $H(0)=0$.

أ- بين أن الدالة H فردية . $(0,5pt)$

ب- بين أن : $(\forall x\in[0;1[);1-4H(x)=\dfrac{2}{g(x)}$. $(0,5pt)$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة H ، ثم أرسم المنحنى (C_H) في معلم متعامد و ممنظم . $(0,5pt)$

⇦ تمارين إضافية:

■ **التمرين رقم 01:** $(01pt)$

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للإشتقاق في الصفر بحيث :

$$(\exists \alpha \in]0;1[)(\forall x \in \mathbb{R});f(\alpha x)=\alpha f(x)$$.

⇦ أثبت أن f دالة خطية (بمعنى أنه : $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R});f(x)=ax$) .

■ **التمرين رقم 02:** $(01pt)$

لتكن f و g دالتين متصلتين على قطعة $[a;b]$ بحيث :

$$(\forall x \in [a;b]);0<f(x)<g(x)$$.

و لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N});x_n \in [a;b]$.

⇦ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n=\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)^n$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **التمرين رقم 03:** $(1;5pts)$

لتكن f دالة متصلة و تناقصية قطعا على القطعة $[0;1]$ بحيث : $f([0;1])\subset[0;1]$.

1)- بين أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! x_n \in [0;1]);f(x_n)=x_n{}^n$.

2)- بين أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أعط تأطيرا لنهايتها .

3)- أثبت بالخلف أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$.

■ **التمرين رقم 04:** $(1;5pts)$

1)- لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق :

$$(\exists k \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in \mathbb{R});f'(x)\geq k$$.

⇦ بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

2)- لتكن g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق : $(\forall x \in \mathbb{R});g'(x)>0$.

⇦ هل الدالة g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ؟ علل جوابك .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

Abdellah belkhatir (abouzakariyamaths@gmail.com – tel : 0662069066)