التمرين الأول:

الجزء الأول:

⇦ نزود المجموعة $I =]0;+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

لكل $(a,b)\in I\times I$: $a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$.

1)- لكل $(a,b)\in I\times I$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} a*b &= e^{\ln(a).\ln(b)} \\ &= e^{\ln(b).\ln(a)} \\ &= b*a \end{aligned}$$

⇦ إذن القانون * تبادلي .

لكل $(a,b,c)\in I\times I\times I$ ، لدينا :

$$(a*b)*c = e^{\ln(a*b).\ln(c)}$$

و بما أن : $\ln(a*b)=\ln(a).\ln(b)$ ، فإن :

$$\begin{aligned} (a*b)*c &= e^{[\ln(a).\ln(b)].\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a).[\ln(b).\ln(c)]} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b*c)} \\ &= a*(b*c) \end{aligned}$$

⇦ إذن القانون * تجميعي .

2)- لدينا : $e\in I$ ، و لكل $a\in I$:

$$\begin{aligned} a*e &= e^{\ln(a).\ln(e)} \\ &= e^{\ln(a)} \quad (\ln e = 1) \\ &= a \end{aligned}$$

و القانون * تبادلي ، إذن : $(\forall a\in I), a*e = e*a = a$.

⇦ و منه فإن القانون * يقبل عنصرا محايدا في I هو e .

3)- أ- لكل a و b من $I-\{1\}$ ، لدينا : $\ln(a)\neq 0$ و $\ln(b)\neq 0$.

إذن : $e^{\ln(a).\ln(b)}\neq 1$.

و منه فإن لكل a و b من $I-\{1\}$: $a*b\in I-\{1\}$.

إذن * قانون تركيب داخلي في $I-\{1\}$.

و بما أنه تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في I هو e و $e\in I-\{1\}$

فإنه أيضا تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا هو e في $I-\{1\}$.

بقي أن نبين أن كل عنصر a من $I-\{1\}$ يقبل مماثلا في $(I-\{1\},*)$.

لكل b من I ، لدينا :

$$\begin{aligned} a*b = e &\Leftrightarrow e^{\ln(a).\ln(b)} = e \\ &\Leftrightarrow \ln(a).\ln(b) = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(b) = \frac{1}{\ln(a)} \quad (a\neq 1 \Rightarrow \ln(a)\neq 0) \\ &\Leftrightarrow b = e^{\frac{1}{\ln(a)}} \end{aligned}$$

و بما أن : $(\forall a\in I-\{1\}), e^{\frac{1}{\ln(a)}}\in I-\{1\}$ (لأن : $\frac{1}{\ln(a)}\neq 0$)

فإن كل عنصر a من $I-\{1\}$ يقبل مماثلا في $(I-\{1\},*)$ هو : $a' = e^{\frac{1}{\ln(a)}}$.

⇦ إذن $(I-\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

ب- نبين أن $J =]1;+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I-\{1\},*)$.

لدينا : $e>1$ إذن $e\in J$.

و منه فإن : $J\neq\varnothing$.

لكل عنصرين a و b من J ، لدينا : $a*b' = e^{\ln(a).\ln(b')}$

و بما أن : $b' = e^{\frac{1}{\ln(b)}}$ فإن : $\ln(b') = \dfrac{1}{\ln(b)}$

إذن : $a\in \mathrm{J} \Rightarrow \ln(a)>0$ و $b\in \mathrm{J} \Rightarrow \ln(b') = \dfrac{1}{\ln(b)}>0$

و منه فإن : $e^{\ln(a).\ln(b')} > 1$ بمعنى أن : $a*b' \in \mathrm{J}$.

⇦ إذن $\mathrm{J} =]1;+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathrm{I}-\{1\},*)$.

4)- نزود المجموعة $\mathrm{I} =]0;+\infty[$ بالقانون $\times$ (الضرب في $\mathbb{R}$)

أ- نبين أن القانون $*$ توزيعي على $\times$ في I .

يكفي أن نبين أن ، لكل a و b و c من I : $a*(b\times c) = (a*b)\times(a*c)$.

لأن القانون $*$ تبادلي .

لدينا :

$$\begin{aligned} a*(b\times c) &= e^{\ln(a).\ln(b\times c)} \\ &= e^{\ln(a).[\ln(b)+\ln(c)]} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a).\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)}\times e^{\ln(a).\ln(c)} \\ &= (a*b)\times(a*c) \end{aligned}$$

⇦ إذن $*$ توزيعي على $\times$ في I .

ب- نبين أن $(\mathrm{I},\times,*)$ جسم تبادلي .

لدينا : $(\mathrm{I},\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 1 .

و $(\mathrm{I}-\{1\},*)$ أيضا زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو e .

و بما أن القانون $*$ توزيعي على $\times$ في I ، فإن :

⇦ $(\mathrm{I},\times,*)$ جسم تبادلي .

- <u>الجزء الثاني</u> :

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1)- لدينا : $A^2=\begin{pmatrix} 1-1+4 & 1-1+4 & -2+2 \\ -1+1-4 & -1+1-4 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 & 4-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و $A^3=A\times A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2)- بما أن : $A\times A^2=\theta$ و $A\neq\theta$ و $A^2\neq\theta$ (حيث θ هي المصفوفة المنعدمة)

فإن المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$.

إذن A غير قابلة للقلب في $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$.

⇦ <u>طريقة ثانية</u> :

لو كانت المصفوفة A تقبل مقلوبا في $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ لوجدت مصفوفة B من $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ بحيث : $A\times B=B\times A=\mathrm{I}$ (I هي المصفوفة الوحدة)

إذن : $A^3\times B=A^2\times \mathrm{I}$ بمعنى أن : $A^2=\theta$

و هذا تناقض لأن : $A^2\neq\theta$.

<u>التمرين الثاني</u> :

1)- أ- نحدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$.

$$\begin{aligned} 3+4i &= 4+4i-1 \\ &= 2^2+2\times 2i+(i)^2 \\ &= (2+i)^2 \end{aligned}$$

لدينا

⇦ إذن الجذرين المربعين ل $3+4i$ هما : $2+i$ و $-2-i$.

ب- نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): 4z^2-10iz-7-i=0$

مميزها المختصر هو :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-5i)^2-4(-7-i)\\ &=-25+28+4i\\ &=3+4i\end{aligned}$$

و بما أن أحد الجذرين المربعين ل Δ' هو : $\delta = 2+i$

⇐ فإن حلي المعادلة (E) هما :

$z_1=\dfrac{5i+2+i}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ و $z_2=\dfrac{5i-(2+i)}{4}=\dfrac{-1}{2}+i$.

2- لدينا : $a=\dfrac{-1}{2}+i$ و $b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

أ- بما أن : $a=\dfrac{-1+2i}{2}$ و $b=\dfrac{1+3i}{2}$ فإن :

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}&=\frac{1+3i}{-1+2i}\\ &=\frac{-(1+3i)(1+2i)}{(-1)^2+2^2}\\ &=\frac{-1}{5}(1-6+5i)\\ &=1-i\end{aligned}$$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{z_B-z_A}{z_O-z_A}&=\frac{b-a}{-a}\\ &=\frac{a(1-i)-a}{-a}\\ &=\frac{1-i-1}{-1}\\ &=i\end{aligned}$$

إذن : $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ و $AO=AB$

⇐ بمعنى أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O .

3- أ- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة $C(c)$ (حيث $c\neq a$) وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

و لتكن T الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AO}(-a)$.

لدينا :

$$\begin{aligned}D=R(B)&\Leftrightarrow d-c=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c)\\ &\Leftrightarrow d-c=i(b-c)\\ &\Leftrightarrow d=ib+c(1-i)\\ &\Leftrightarrow d=i\frac{1+3i}{2}+c(1-i)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{d=\dfrac{-3+i}{2}+(1-i)c}$.

و

$$a=\frac{-1+2i}{2}$$

$$\begin{aligned}L=\mathrm{T}(D)&\Leftrightarrow \overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AO}\\ &\Leftrightarrow l-d=-a\\ &\Leftrightarrow l=d-a\\ &\Leftrightarrow l=\frac{-3+i}{2}+(1-i)c-a\\ &\Leftrightarrow l=\frac{1-2i}{2}+\frac{-3+i}{2}+(1-i)c\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{l=-1-\dfrac{1}{2}i+(1-i)c}$.

ج- نكتب $\dfrac{l-c}{a-c}$ على الشكل الجبري .

بما أن : $l=-1-\frac{1}{2}i+(1-i)c$ فإن : $l-c=-1-\frac{1}{2}i-ic$

إذن : $l-c=i\left(i-\frac{1}{2}-c\right)=i(a-c)$

بمعنى أن : $\frac{l-c}{a-c}=i$.

⇦ و يكون بذلك المثلث ACL متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C .

التمرين الثالث:

1)- طريقة 01:

لكل $m\in\mathbb{N}$ ، لدينا : $\left(-1\equiv4[5]\right)$ $m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow m^2\equiv4[5]$.

ثم ننشىء جدول بواقي القسمة الأقليدية ل m^2 على 5 :

$m\equiv$	0	1	2	3	4	و منه فإن :
$m^2\equiv$	0	1	4	4	1	$m^2\equiv4[5]\Leftrightarrow\left(m\equiv2[5]\text{ ou }m\equiv3[5]\right)$

⇦ إذن : $m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow m\in\left\{5k+2;5k+3/k\in\mathbb{N}\right\}$.

طريقة 02:

لكل $m\in\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow m^2\equiv4[5]$$
$$\Leftrightarrow m^2-4\equiv0[5]$$
$$\Leftrightarrow 5/(m-2)(m+2)$$

و بما أن 5 عدد أولي ، فإن :

$$5/(m-2)(m+2)\Leftrightarrow 5/(m-2)ou\ 5/(m+2)$$
$$\Leftrightarrow m\equiv2[5]ou\ m\equiv-2[5]$$
$$\Leftrightarrow m\equiv2[5]ou\ m\equiv3[5]$$

⇦ إذن : $m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow m\in\left\{5k+2;5k+3/k\in\mathbb{N}\right\}$.

طريقة 03:

بما أن 5 عدد أولي فإن $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+,\times\right)$ حلقة كاملة (جسم) ، إذن :

$$m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow\left(\overline{m}-\overline{2}\right)\times\left(\overline{m}+\overline{2}\right)=\overline{0}$$
$$\Leftrightarrow\overline{m}\in\left\{\overline{2};\overline{3}=-\overline{2}\right\}$$

⇦ إذن : $m^2+1\equiv0[5]\Leftrightarrow m\in\left\{5k+2;5k+3/k\in\mathbb{N}\right\}$.

2)- ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع $k\in\mathbb{N}$ ($p\geq3$)

و ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث : $n^2+1\equiv0[p]$.

أ- لدينا : $n^2+1\equiv0[p]\Leftrightarrow n^2\equiv-1[p]$

إذن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv(-1)^{1+2k}[p]$ بمعنى أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv-1[p]$.

ب- نبين أن : $n\wedge p=1$ (نستعمل مبرهنة بوزو) .

لدينا :

$$n^2+1\equiv0[p]\Leftrightarrow p/n^2+1$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{N}^*\right)/n^2+1=kp$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{N}^*\right)/kp-n\times n=1$$

إذن : $\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2/up+vn=1$ حيث : $u=k$ و $v=-n$.

⇦ و منه فإن حسب مبرهنة بوزو n و p أوليان فيما بينهما .

ج- بما أن : $n\wedge p=1$ و p عدد أولي موجب ، فإن حسب مبرهنة فيرما :

$$n^{p-1}\equiv1[p]\ .$$

وحيث أن : $p=3+4k$ فإن : $p-1=2+4k=2(1+2k)$

إذن : $n^{2(1+2k)}\equiv1[p]$ بمعنى أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv1[p]$.

د- إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث : $n^2+1\equiv0[p]$ ، فإن :

من جهة : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv-1[p]$ أي أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv p-1[p]$.

و من جهة أخرى : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p]$

و $p-1\neq 1$ لأن : $p\geq 3 \Rightarrow p-1\geq 2$.

و هذا غير ممكن (لأنه : $(\forall a\in\mathbb{Z}),(\exists! r\in\{0,1,2,3,...,n-1\})/a\equiv r[n]$)

إذن لا يوجد أي عدد صحيح طبيعي n بحيث : $n^2+1\equiv 0[p]$.

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=4xe^{-x^2}$.

1)- نحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لكل $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، لدينا : $f(x)=\frac{4}{x}\times x^2e^{-x^2}$.

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = -\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y=0$).

2)- الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ (لأنها جداء قصور دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$) و لكل $x\in[0;+\infty[$ ، لدينا :

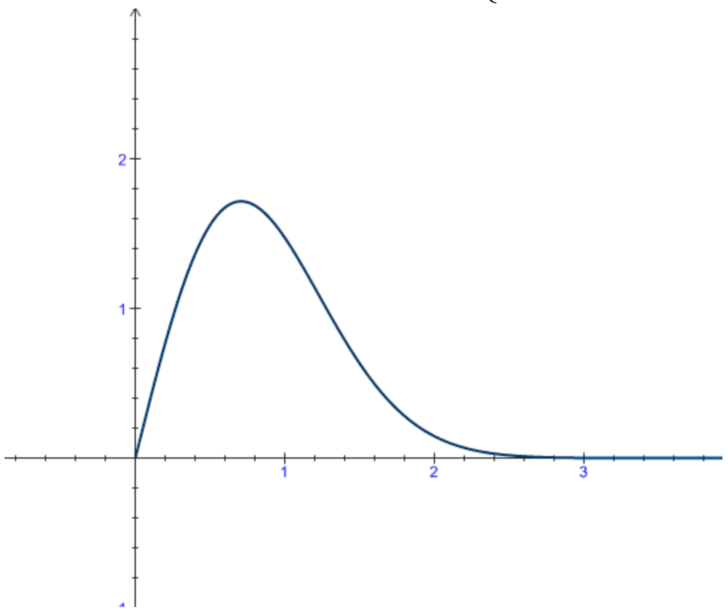
$$\begin{aligned} f'(x)&=4\left[e^{-x^2}+x(-x^2)'e^{-x^2}\right]\\ &=4e^{-x^2}\left[1-2x^2\right]\\ &=4(1+\sqrt{2}x)e^{-x^2}(1-\sqrt{2}x)\end{aligned}$$

و بما أن $(\forall x\in[0;+\infty[),4(1+\sqrt{2}x)e^{-x^2}>0$ فإن :

$sg[f'(x)]=sg[1-\sqrt{2}x]$ ، و جدول تغيرات f كما يلي :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f	0 ↗	$2\sqrt{\frac{2}{e}}$	↘ 0

3)- لدينا : $f'_d(0)=4$ ، إذن معادلة ديكارتية لنصف المماس في أصل المعلم هي : $\begin{cases}y=4x\\x\geq 0\end{cases}$. و المنحنى (C) كما يلي :



4)- نحسب التكامل : $a=\int_0^1 f(x)\,dx$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} a&=-2\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx\\ &=-2\int_0^1(-x^2)'e^{-x^2}dx\\ &=-2\left[e^{-x^2}\right]_0^1\\ &=-2\left(e^{-1}-1\right)\\ &=2\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

و بما أن وحدة قيلس المساحة هي $4cm^2$ ، فإن مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و محوري المعلم و المستقيم $x=1$ هي : $4a=8\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

II- ليكن $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ و f_n الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$.

1)- أ- لكل $x\in]1;+\infty[$ ، لدينا : $x^2>x$ إذن : $-x^2<-x$

و الدالة : $t\mapsto e^t$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ، إذن : $e^{-x^2}<e^{-x}$.

ب- باستعمال النتيجة السابقة ، نحصل على :

$$(\forall x\in]1;+\infty[),0<f_n(x)<4x^ne^{-x}$$

و بوضع : $t=-x$ ، فإن : $4x^ne^{-x}=4(-1)^nt^ne^t$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}4x^ne^{-x^2}=\lim_{t\to-\infty}4(-1)^nt^ne^t=0$ ($\lim_{t\to-\infty}(t)^ne^t=0$)

و بالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$.

2)- الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ، و لكل $x\in[0;+\infty[$ ، لدينا :

$$f_n'(x)=4\left[nx^{n-1}e^{-x^2}+x^n(-x^2)'e^{-x^2}\right]$$

$$=4x^{n-1}e^{-x^2}\left[n-2x^2\right]$$

$$=4x^{n-1}e^{-x^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}x\right)$$

⇦ جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	0	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$+\infty$
f_n	0 ↗	$4\left(\sqrt{\frac{n}{2e}}\right)^n$	↘ 0

3)- بما أن : $n\ge2$ فإن : $\frac{\sqrt{2n}}{2}\ge1$ ، إذن : $[0;1]\subset\left[0;\frac{\sqrt{2n}}{2}\right]$

و منه فإن الدالة f_n تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ و بما أنها متصلة على هذا المجال

و لدينا : $f_n([0;1])=\left[0;\frac{4}{e}\right]$ و $1\in\left]0;\frac{4}{e}\right[$ لأن : $e<4$

فإن المعادلة : $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0;1[$.

4)- أ- لدينا : $f_n(u_n)=1\Leftrightarrow4(u_n)^ne^{-(u_n)^2}=1$

$$f_{n+1}(u_n)=4(u_n)^{n+1}e^{-(u_n)^2}$$

إذن :
$$=u_n\left[4(u_n)^ne^{-(u_n)^2}\right]$$

$$=u_n\times1$$

و منه : $(\forall n\ge2);f_{n+1}(u_n)=u_n$.

ب- لدينا : $f_{n+1}(u_{n+1})=1>u_n=f_{n+1}(u_n)$

و الدالة f_{n+1} تزايدية قطعا على المجال $]0;1[$ ($u_n\in]0;1[$ و $u_{n+1}\in]0;1[$)

إذن : $u_{n+1}>u_n$ بمعنى أن المتتالية $(u_n)_{n\ge2}$ تزايدية قطعا .

و بما أنها مكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة .

5)- نضع : $L=\lim_{n\to+\infty}u_n$.

أ- بما أن : $(\forall n\ge2),0<u_n<1$ و $(u_n)_{n\ge2}$ تزايدية قطعا و متقاربة

فإن نهايتها L تحقق : $0\le L\le1$ و $0<u_2<L$

إذن : $0<L\le1$.

ب- لكل $n\ge2$ ، لدينا :

$$f_n(u_n)=1\Leftrightarrow4(u_n)^ne^{-(u_n)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow4(u_n)^n=e^{(u_n)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left[4(u_n)^n\right]=(u_n)^2$$

$$\Leftrightarrow\ln4+n\ln(u_n)=(u_n)^2$$

و بما أن : $u_n\in]0;1[$ فإن : $0<(u_n)^2<1$

أي أن : $0<\ln(4)+n\ln(u_n)<1$

إذن : $0<\frac{\ln(4)}{n}+\ln(u_n)<\frac{1}{n}$

⇦ و بالتالي فإن : $(\forall n\ge2);-\frac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}$.

ج- بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ حيث $L\in]0;1]$

و دالة اللوغاريتم النبيري $\ln$ متصلة في L ، فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)=\ln(L)$

و من جهة أخرى لدينا : $(\forall n\geq 2);-\dfrac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\ln(4)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n}\right)=0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=0$

نستنتج إذن أن : $\ln(L)=0$ بمعنى أن : $L=1$.

التمرين الخامس:

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1)- لكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا : $-x\in\mathbb{R}^*$ و $F(-x)=\int_{-x}^{-2x}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

و باستعمال مكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع : $u=-t$ نـ فإن :

$$F(-x)=\int_x^{2x}\frac{-1}{\ln\left(1+(-u)^2\right)}du$$

$$=-\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+u^2)}du$$ ، إذن الدالة F فردية .

$$=-F(x)$$

2)- لكن $x\in]0;+\infty[$ ، نضع : $\varphi(x)=\int_1^x\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

أ- لكن $x\in]0;+\infty[$ ، لدينا :

$$F(x)=\int_x^1\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt+\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$=\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt-\int_1^x\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$=\varphi(2x)-\varphi(x)$$

ب- بما أن الدالة : $x\mapsto\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$ ، فإن :

الدالة : $\varphi:x\mapsto\int_1^x\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$(\forall x\in]0;+\infty[),\varphi'(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

⇦ و الدالة : $g:x\mapsto\varphi(2x)$ بدورها قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ كمركب الدالتين $x\mapsto 2x$ و $\varphi:x\mapsto\varphi(x)$ القابلتان للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

و لدينا : $(\forall x\in]0;+\infty[),g'(x)=(2x)'\times\varphi'(2x)=\dfrac{2}{\ln(1+4x^2)}$

⇦ و بالتالي ، فإن F قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ كمجموع الدالتين φ و g القابلتين للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و :

$$(\forall x\in]0;+\infty[),F'(x)=\frac{2}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

ج- لكن $x\in]0;+\infty[$ ، لدينا :

$$F'(x)=\frac{2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+x^2)\times\ln(1+4x^2)}$$

$$=\frac{\ln\left[(1+x^2)^2\right]-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+x^2)\times\ln(1+4x^2)}$$

و بما أن : $1+x^2>1$ و $1+4x^2>1$ فإن : $\ln(1+x^2)\times\ln(1+4x^2)>0$

⇦ لكل $x \in \left]0;+\infty\right[$ ، لدينا :

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)^2=1+4x^2$$
$$\Leftrightarrow 1+2x^2+x^4=1+4x^2$$
$$\Leftrightarrow x^4-2x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

$F'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]0;\sqrt{2}\right[$ و $F'(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]\sqrt{2};+\infty\right[$

إذن الدالة F تزايدية قطعا على $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ و تناقصية قطعا على $\left]0;\sqrt{2}\right[$.

3) أ- ليكن $x\in \left]0;+\infty\right[$ ، لدينا $[x;2x]\subset \left]0;+\infty\right[$.

و الدالة φ متصلة و قابلة للإشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ ، إذن فهي متصلة على $[x;2x]$ و قابلة للاشتقاق على $\left]x;2x\right[$.

و بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية ، فإنه :

$$\exists c\in \left]x;2x\right[\,/\, \varphi(2x)-\varphi(x)=(2x-x)\varphi'(c)$$

بمعنى أن : $F(x)=\dfrac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}$.

ب- بما أن : $c\in \left]x;2x\right[$ ، فإن : $1+x^2<1+c^2<1+4x^2$

و الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $\left]0;+\infty\right[$ ، إذن :

$$\ln\left(1+x^2\right)<\ln\left(1+c^2\right)<\ln\left(1+4x^2\right)$$

و منه : $\dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\dfrac{1}{\ln\left(1+c^2\right)}<\dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}$

و بضرب أطراف هذه المتفاوتة في x فإن :

$$\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}<F(x)<\frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)} .$$

ج- لدينا : $\left(\forall x\in \left]0;+\infty\right[\right), F(x)>\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}$

و $\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\dfrac{1}{4x}\times\dfrac{4x^2}{\ln\left(1+4x^2\right)}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x^2}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$ ($\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$)

و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{4x}=+\infty$.

فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=+\infty$.

⇦ و من جهة أخرى :

$$\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\frac{x}{2\sqrt{1+4x^2}}\times\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{1+4x^2}}\times\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)}$$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{\ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\ln(t)}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2}{1+4x^2}}=\dfrac{1}{4}$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

⇦ لدينا : $(\forall x>0), \dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\dfrac{F(x)}{x}<\dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

د- بما أن : $(\forall x>0), \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$

⇦ فإن من جهة : $F(\sqrt{e-1})<\frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+e-1)}=\sqrt{e-1}$

⇦ و من جهة أخرى :

$$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2\ln\left(1+4\times\frac{e-1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{e-1}}{2} .$$

⇦ نعتبر الدالة G المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $G(x)=F(x)-x$

G قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و :

$$(\forall x\in]0;+\infty[), G'(x)=\frac{2}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}-1$$

⇦ لدينا :

$$G'(x)=\left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)+\left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)}-1\right)$$

و إذا كان $x>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$ فإن : $1+4x^2>e$

إذن : $\frac{1}{\ln(1+4x^2)}-1<0$

و بما أن : $(\forall x>0), \frac{1}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}<0$

فإن : $\left(\forall x>\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right), G'(x)<0$

إذن الدالة G تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2};+\infty\right[$.

و لدينا : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}\Rightarrow G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>0$

و $F(\sqrt{e-1})<\sqrt{e-1}\Rightarrow G(\sqrt{e-1})<0$.

إذن المعادلة : $G(x)=0$ أي : $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2};+\infty\right[$.

⇦ على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right]$ الدالة F تناقصية قطعا .

لأن : $\left]0;\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right]\subset\left]0;\sqrt{2}\right[$ و F تناقصية قطعا على $\left]0;\sqrt{2}\right[$.

إذن : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right[\right), F(x)>F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$

و بما أن : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$.

فإن : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right[\right), F(x)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}>x$

و بالتالي : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right[\right), F(x)>x$.

⇦ خلاصة :

المعادلة : $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ و الحل α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2};\sqrt{e-1}\right[$.