ثانوية موسى بن نصير	تجريبي رقم 04	2 بكالوريا علوم رياضية
مديرية الخميسات	دورة ماي 2017/2016	ذ : عبدالله بن الختير

مدة الإنجاز : أربع ساعات

التمرين الأول: (2,75 ن)

⇦ في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة :

$$\mathcal{H}=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0\end{pmatrix} / x\in\mathbb{Z}\right\} .$$

1)- بين أن $(\mathcal{H},+)$ زمرة تبادلية . 0,5

2)- تحقق أن $\mathcal{H}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,25

3)- بين أن $(\mathcal{H},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية محددا وحدتها (العنصر المحايد في $(\mathcal{H},\times)$) . 0,75

4)- بين أن الحلقة $(\mathcal{H},+,\times)$ كاملة . 0,5

5)- أ- ليكن $x\in\mathbb{Z}$. بين أن المصفوفة $M(x)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{H},+,\times)$ إذا وفقط إذا كان : $x\in\{-1,1\}$. 0,5

ب- هل $(\mathcal{H},+,\times)$ جسم ؟ علل جوابك . 0,25

التمرين الثاني: (04 ن)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E): z^2-(3a-2i)z+2a^2-4ai=0 \text{ ، حيث } a\in\mathbb{C} .$$

1)- أ- بين أن : $\Delta=(a+2i)^2$ (حيث Δ هو مميز المعادلة (E)) . 0,5

ب- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$. 0,75

2)- في هذا السؤال نأخذ : $a=1+i$ ، و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1|<|z_2|$.

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . 0,5

ب- تحقق أن : $(-z_1)^3=z_2$ و استنتج على الشكل الجبري الجذور المكعبة للعدد z_2 . 0,75

II- المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط I و J و K التي ألحاقها على التوالي هي : $z_I=i$ و $z_J=2a$ و $z_K=a-2i$.

أ- بين أن النقط I و J و K مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $a\in i\mathbb{R}$. 0,5

ب- فيما يلي نفترض أن : $a\notin i\mathbb{R}$. و خارج المثلث IJK ننشئ النقطة H حيث المثلث JKH متساوي الساقين و قائم الزاوية في H .

✓ بين أن : $z_H=\dfrac{(3-i)a+2-2i}{2}$ أو $z_H=\dfrac{(3+i)a-2-2i}{2}$ ، ثم استنتج قيم a التي من أجلها يكون الرباعي $IJHK$ مربعا . 1

التمرين الثالث: (3,25 ن)

0,5	I-1)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);n^n\wedge\left(n+1\right)^{n+1}=1$ (استعمل مبرهنة بوزو) .
0,5	2)- بين أن العدد 2017 أولي ، ثم استنتج أن : $\left(\forall k\in\{1,2,...,2016\}\right);k^k\wedge 2017=1$.
	II- ليكن $\lambda\in\mathbb{Z}$ ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة :
	$\left(E\right):2017x-2016y=1-\lambda$.
0,5	1)- حل المعادلة $\left(E\right)$ مبرزا مراحل الحل ، علما أن الزوج $\left(1-\lambda,1-\lambda\right)$ حل لها .
	2)- نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $\left(S\right):\begin{cases}x\equiv 1\left[2016\right]\\x\equiv\lambda\left[2017\right]\end{cases}$.
0,25	أ- بين أنه إذا كان x حل للنظمة $\left(S\right)$ فإن : $x=\lambda+2017u=1+2016v$ ، حيث الزوج $\left(u,v\right)$ حل للمعادلة $\left(E\right)$.
0,5	ب- استنتج مجموعة حلول النظمة $\left(S\right)$ معللا جوابك .
0,5	3)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ حلا للنظمة $\left(S\right)$. بين أن : $2016/\left(n-1\right)$ و $\lambda^n\equiv\lambda\left[2017\right]$.
0,5	4)- استنتج أنه : $\left(\forall\lambda\in\mathbb{Z}\right)\left(\exists n\in\mathbb{N}^*\right);n^n\equiv\lambda\left[2017\right]$.

التمرين الرابع: (05 ن)

الجزء الأول:

	⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي :
	$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);f\left(x\right)=1-x+2\ln x$.
0,75	1)- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_f\right)$.
0,25	2)- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);f'\left(x\right)=\dfrac{2-x}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .
0,75	3)- بين أن المعادلة : $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left[2,+\infty\right[$ و أن $\alpha\in\left]3,4\right[$.
0,75	4)- ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

الجزء الثاني:

	⇦ لتكن $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :
	$\begin{cases}a_0=3\\\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);a_{n+1}=1+2\ln\left(a_n\right)\end{cases}$ و $\begin{cases}b_0=4\\\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);b_{n+1}=1+2\ln\left(b_n\right)\end{cases}$.
0,5	1)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);2<a_n<\alpha<b_n$.
0,5	2)- بين أن المتتالية $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا و أن المتتالية $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .

0,5	**3)- أ-** بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0<b_{n+1}-a_{n+1}\leq\frac{2}{3}(b_n-a_n)$.
0,5	**ب-** استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0<b_n-a_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
0,5	**4)-** بين أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان و حدد نهايتهما المشتركة .

التمرين الخامس: (05 ن)

	⇦ لكل $x\in\mathbb{R}$ نضع : $u(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ و $v(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
	و لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
	$F(0)=\ln 2$ و $(\forall x\in\mathbb{R}^*);F(x)=\int_x^{2x}\frac{u(t)}{t^2}dt$.
0,5	**1)-** تحقق أن $D_F=\mathbb{R}$ ، ثم بين أن الدالة F زوجية .
0,25	**2)- أ-** بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)\geq u(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dt$.
0,75	**ب-** استنتج النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .
0,5	**3)-** بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)=\frac{2u(x)-u(2x)}{2x}+\int_x^{2x}\frac{v(t)}{t}dt$ (استعمل مكاملة بالأجزاء).
0,25	**4)- أ-** بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);v(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{v(t)}{t}dt\leq v(2x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$.
0,5	**ب-** استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{v(t)}{t}dt$ ، ثم بين أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر .
0,25	**5)-** بين أن : $(\forall a\in]0,+\infty[);u(a)-a=\int_0^a\frac{(a-t)^2}{2}v(t)dt$ (استعمل مكاملة بالأجزاء مرتين) .
0,5	**6)-** تحقق أن : $(\forall a]0,+\infty[);\int_0^a\frac{(a-t)^2}{2}dt=\frac{a^3}{6}$ ، ثم استنتج أن :
	$(\forall a\in[0,1]);0\leq u(a)-a\leq\frac{a^3}{6}v(1)$.
0,5	**7)-** بين أن : $\left(\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right);0\leq F(x)-\ln 2\leq\frac{x^2}{4}v(1)$ ، ثم أدرس قابلية اشتقاق F على
	على اليمين في الصفر و أول هندسيا النتيجة .
0,75	**8)-** بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F'(x)=\frac{u(2x)-2u(x)}{2x^2}$
	ثم ضع جدول تغيرات F على $\mathbb{R}$.