أهداف الدرس

- تنظيم وتدقيق بعض المفاهيم العامة التي تطرقت اليها البرامج السابقة بشكل ضمني والسمو بها وتوسيع مجالات توظيفها.

القدرات المنتظرة

- التعبير عن مجموعة بادراك او بتفصيل.
- التمكن من الربط بين قواعد المنطق والعمليات على المجموعات.
- تحديد الصورة والصورة العكسية لمجموعة بتطبيق.
- تحديد التقابل العكسي لتطبيق واستعماله في حل مسائل.
- تحديد مركب تطبيقين وتفكيك تطبيق الى تطبيقين او أكثر بهدف تعيين خاصياتهما.

I) المجموعات ENSEMBLES

1) تحديد مجموعة :

تقديم

- لتكن D_{24} مجموعة قواسم العدد 24 الصحيحة الطبيعية.

يمكن التعبير عن هذه المجموعة بادراك $D_{24}=\{d\in\mathbb{N}/\exists k\in\mathbb{N};24=k\times d\}$

ويمكن كذلك التعبير عنها بتفصيل $D_{24}=\{1;2;3;4;6;8;12;24\}$.

- لتكن P مجموعة الاعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية

يمكن التعبير عن هذه المجموعة بادراك $P=\{n\in\mathbb{N}/\exists k\in\mathbb{N};n=2k\}$

ويمكن كذلك التعبير عنها بتفصيل $P=\{2k/k\in\mathbb{N}\}$

ملحوظة1:

يمكن التعبير عن المجموعة $I=]0;1]$ بادراك $I=\{x\in\mathbb{R}/0<x\leq 1\}$

ولا يمكن التعبير عنها بتفصيل.

س1)

- اكتب المجموعة $E=\{n\in\mathbb{N}^*;n<15$ و n زوجي$\}$ بتفصيل .
- اكتب المجموعة $F=\{2;3;5;7;11\}$ بادراك.
- بين أن $\frac{6}{5}$ عنصر مشترك من المجموعتين $E=\left\{\frac{5n+8}{8n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$ و $F=\left\{\frac{2m+4}{2m-1}/m\in\mathbb{N}\right\}$

ملحوظة2:

المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر تسمى المجموعة الفارغة. نرمز لها ب $\varnothing$ أو $\{\ \}$.

2) جزء مجموعة-مجموعة أجزاء مجموعة: Parties d'un ensemble-ensemble de parties

تقديم:

نعتبر المجموعات التالية $A=\{-2;1;5\}$ و $B=\{-1;0;1\}$ و $E=\{-2;-1;1;3;5\}$

نلاحظ أن:

- جميع عناصر A تنتمي إلى E ونقول إن A جزء (مجموعة جزئية) من E . ونكتب $A \subset E$
- العدد 0 ينتمي إلى B و لا ينتمي إلى E ونقول إن E لا يتضمن B ونكتب $B \not\subset E$.

تعريف:

لتكن E مجموعة غير فارغة. المجموعة المكونة من جميع أجزاء E تسمى مجموعة أجزاء E ويرمز لها ب $P(E)$. إذن $P(E)=\{A / A \subset E\}$.

مثلا: $E=\{a;b;c\}$ مجموعة أجزاء E هي $E=\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\};E\}$.

- $\mathbb{R} \in \wp(\mathbb{R}); \varnothing \in \wp(\mathbb{R}); \mathbb{N} \in \wp(\mathbb{Z});]0;+\infty[\in \wp(\mathbb{R})$.

ملحوظة3: لكل مجموعة E لدينا $E \in \wp(E); \varnothing \in \wp(E)$ و $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \in \wp(E)$.

س2) حدد مجموعة أجزاء E بحيث $E=\{1;\alpha;\delta\}$.

3) التضمن-التساوي : L'inclusion - L'égalité

ا. التضمن:

إذا كان A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة فان:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E; x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in A; x \in B)$$

مثلا: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $]-1;1[\subset \mathbb{R}$ و $\{-2;-1;0;1;2;3;\} \subset \mathbb{Z}$ و $]0;7[\subset \mathbb{R}^{+*}$

س3) نضع $A=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{N}\right\}$ و $B=\left\{-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3} / k \in \mathbb{N}\right\}$ بين أن $A \subset B$

س4) بين أن $-\frac{\pi}{6} \in B$ و $-\frac{\pi}{6} \notin A$. هل $B \subset A$ ؟

ملحوظة4:

- نستنتج أن $(\exists x \in E; x \in A$ و $x \notin B) \Leftrightarrow A \not\subset B$
- نقول إن B يتضمن قطعا A ونكتب $A \subsetneq B$ إذا كان $A \subset B$ و $B \not\subset A$

مثلا: $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ لان $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

خاصيات:

اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا :

- $\varnothing \subset A; A \subset A$.
- $A \subset B$ و $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

ب. التساوي:

لدينا $A=B \Leftrightarrow (A \subset B$ و $B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x \in E; x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

ونستنتج إن $(A \not\subset B$ أو $B \not\subset A) \Leftrightarrow A \neq B$

س5) -بين أن A=B بحيث $A=\{x \in \mathbb{R} / |x|<1\}$ و $B=]-1;1[$.

- بين أن $E=\mathbb{R}$ بحيث $E=\left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2}<\frac{x}{x^2+4}<\frac{1}{2}\right\}$.

4) المتممة-تقاطع-اتحاد-فرق مجموعتين:

أ-المتممة: Le complémentaire

تعريف:

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة E غير فارغة. المجموعة الجزئية $\{x \in E / x \notin A\}$ تسمى متممة A في E. ويرمز لها بأحد الرمزين $\overline{A}$ أو C_E^A.

نستنتج أن $\forall x \in E : x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$ أو $\forall x \in E : x \in C_E^A \Leftrightarrow x \notin A$

أمثلة:

- لتكن P مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية و I مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية. لدينا $\overline{P} = I$ و $\overline{I} = P$ (أي $C_E^P = I$ و $C_E^I = P$)
- $C_{\mathbb{R}}^{\{0\}} = \mathbb{R}^*$ و $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^{-*}$
- $C_{\mathbb{R}}^{\varnothing} = \mathbb{R}$ و $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} = \varnothing$.

خاصيات:

لدينا 1-إذا كان A جزء من مجموعة E غير فارغ فان : $C_E^{C_E^A} = A$ (أي $\overline{\overline{A}} = A$)

2- اذا كان A جزء من مجموعة E غير فارغة فان : $C_A^A = \varnothing$

3- إذا كان A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة فان: $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

-3 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E; x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E; x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E; x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

هكذا يكون $\boxed{(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})}$

س6) : نضع $E = \{0;1;2;3;...;16\}$ و $A = \{x \in E / 16$ يقسم $x\}$ و $B = \{x \in E /$ أولي $x\}$

و $C = \{x \in E / 4$ مضاعف ل $x\}$ بين أن $A \subset E$ و $B \subset E$ و $C \subset A$

ثم حدد C_E^A و C_E^B و C_A^C .

ب-التقاطع: L'intersection

تعريف

ليكن A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة. المجموعة الجزئية $\{x \in E / x \in AB \in \}$ تسمى تقاطع A و B . ويرمز له ب $A \cap B$.

لدينا $\forall x \in E; x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in AB \in)$

أمثلة:

- $[0;1[\cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[= \left[\frac{1}{2};1\right[;[0;1[\cap \mathbb{R} = [0;1[;\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ ;\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}^{+*} \cap \mathbb{R}^{-*} = \varnothing ;\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\} ;\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing ;\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

ملحوظة5:

- اذا كان $A\cap B=\varnothing$ نقول أن A و B منفصلين .
- اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا $A\subset B\Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$:

خاصات التقاطع:

اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا:

- $A\cap B\subset A$ و $A\cap B\subset B$
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- $A\cap\varnothing=\varnothing; A\cap A=A; A\cap B=B\cap A$
- $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$ و $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}$.

س7) بين الخاصية الأخيرة.

ج-الاتحاد: La réunion

تعريف:

ليكن A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة. المجموعة الجزئية $\{x\in E / x\in A$ أو $x\in B\}$ تسمى تقاطع A و B . ويرمز له ب $A\cup B$.

أمثلة:

- $[0;1[\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=[0;+\infty[;[0;1[\cap\mathbb{R}=\mathbb{R};\mathbb{R}^{+}\cap\mathbb{R}^{-}=\mathbb{R};\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}^{+*}\cup\mathbb{R}^{-*}=\mathbb{R}^{*};\mathbb{Z}^{+}\cup\mathbb{Z}^{-}=\mathbb{Z};\varnothing\cup\mathbb{R}=\mathbb{R};\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

ملحوظة6:

- اذا كان $A\subset E$ فان $A\cup\overline{A}=E$.
- اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا :

$A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$. *

* $\forall x\in E;(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\notin A\Rightarrow x\in B)\Leftrightarrow(x\notin B\Rightarrow x\in A)$

خا صات الاتحاد :

اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا:

- $A\subset A\cup B$ و $B\subset A\cup B$
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- $A\cup\varnothing=A; A\cup A=A; A\cup B=B\cup A$ و $A\cup E=E; A\cup\overline{A}=E$
- $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B$ و $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subset A$
- $A\cup B=E\Leftrightarrow\overline{A}\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset A$

س8) بين الخاصيتين الأخيرتين.

خا صات التقاطع والاتحاد:

اذا كان A و B و C أجزاء من مجموعة E غير فارغة لدينا:

- $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ و $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ و $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

- $\overline{A\cup B}=\overline{B}\cap\overline{A}$ و $\overline{A\cap B}=\overline{B}\cup\overline{A}$ (قانوني مورغان).

د-الفرق-الفرق التماثلي: **La différence- La différence symétrique**

تعريف1:

ليكن A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة. المجموعتين الجزئيتين

- $A-B=\{x\in\mathbb{R};x\in A\ B\notin\}$ تسمى فرق A و B.
- $B-A=\{x\in\mathbb{R};x\in B\ A\notin\}$ تسمى فرق B و A.

هكذا يكون $x\in A-B\Leftrightarrow x\in A$ و $x\notin B$

أمثلة:

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}^{-*}$; $\mathbb{R}-\mathbb{R}^{+*}=\mathbb{R}^{-}$; $\mathbb{R}^{+*}-[0;5]=]5;+\infty[$; $[-2;10]-[0;5]=-[-2;0[\cup]5;10]$.

ملحوظة7:

- $A-B$ و $B-A$ منفصلان (لان $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$)
- $A-B=A\cap\overline{B}$ و $A-\overline{B}=A\cap B$.

تعريف2 :

ليكن A و B جزئيين من مجموعة E غير فارغة. اتحاد المجموعتين $A-B$ و $B-A$ يسمى الفرق التماثلي ل A و B و نرمز له ب $A\Delta B$. أي $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

ا الشكل

ملحوظة8:

$A\Delta A=\varnothing$ و $A\Delta E=E-A$ و $A\Delta\varnothing=A$ و $A\Delta B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$.

خاصيات

- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $A\Delta B=B\Delta A$ و $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.
- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

س10) بين أن $(A\Delta B=A\cap B)\Leftrightarrow(A=B=\varnothing)$

5) -الجداء الديكارتي لمجموعتين– le produit cartésien de 2 ensembles

أ-تعريف:

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين.الجداء الديكارتي ل E و F هو المجموعة التي نرمز لها ب $E\times F$ المعرفة ب $E\times F=\{(x;y)/x\in E\ F\in\}$

إذا كانت فان $E\times E=E^2$ يسمى المربع الديكارتي ل E ويكون $E^2=\{(x;y)/x\in E\ E\in\}$

ب-أمثلة:

- $E=\{a;b;c\}$, $F=\{1;2\}$ $E\times F=\{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(c;1);(c;2)\}$

$$F\times E=\{(1;a);(1;b);(1;c);(2;a);(2;b);(2;c)\}$$

- $G=\{a;b\}$ $\quad G^2=\{(a;a);(a;b);(b;a);(b;b)\}$

ج-ملحوظة9:

- $E\times F\neq F\times E$ على العموم.
- $E\times\varnothing=\varnothing\times E=\varnothing$
- $E\times F=\varnothing\Leftrightarrow(E=\varnothing)\vee(F=\varnothing)$
- يمكن تعريف الجداء الديكارتي لاكثر من مجموعتين

$$E\times F\times G=\{(x;y;z)/x\in E;y\in F;z\in G\}$$

$$E_1\times E_2\times\ldots\times E_n=\{(x_1;x_2;\ldots;x_n)/x_1\in E_1;x_2\in E_2;\ldots;x_n\in E_n\}$$

ونكتب $\prod_{i=1}^{i=n}E_i=\{(x_1;x_2;\ldots;x_n)/x_1\in E_1;x_2\in E_2;\ldots;x_n\in E_n\}$

- يمكن استعمال مخطط ديكارتي لتحديد الجداء الديكارتي لمجموعتين

4				(d ; 4)
3				
2				
1	(a ; 1)			
	a	b	c	D

- لدينا $(x;y)=(x';y')\Leftrightarrow(x=x')\wedge(y=y')$

س.11) مثل في مستوى منسوب الى م.م.م الجداء الديكارتي $[-1;1]\times[0;1]$

II)-التطبيقات - LES APPLICATIONS

1-عموميات:

ا-تعريف:

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين. نسمي تطبيق من E نحوF كل علاقةf تربط كل عنصر x من E
بعنصر وحيدy منF .

y يسمى صورة xبf .xو يسمى سابق y ونكتب $y=f(x)$.

E تسمى مجموعة الانطلاق و Fمجموعة الوصول.

و نكتب $f:E\to F$

$x\mapsto f(x)$ باستعمال المكممات نكتب $\forall x\in E;\exists!\,y\in F/y=f(x)$

ملحوظة10:

- التطبيق هو دالة مجموعة تعريفها هي مجموعة انطلاقها.
- المجموعة $G=\{(x;y)\in E\times F/y=f(x)\}$ تسمى المبيان الديكارتي ل f $(G\subset E\times F)$.
- مجموعة التطبيقات من E نحوF يرمز لها ب $A(E;F)$ أو F^E .

ب-مثال:

نعتبر التطبيق $f:\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x;y) \mapsto x+y$

سوابق 0 هي (0; 0) لان 0=0+0 الحل الوحيد ل $x+y=0$ هو(0; 0) في $\mathbb{N}^2$

سوابق 2 هي $\{(1;1);(0;2);(2;0)\}$

سوابق 3 هي $\{(1;2);(2;1);(0;3);(3;0)\}$

هل العبارة $f(a;b)=f(a';b') \Rightarrow (a;b)=(a';b')$ صحيحة ؟ علل جوابك.

ج- ملحوظة11:

- كل دالة عددية هي تطبيق من مجموعة تعريفها نحو $\mathbb{R}$.
- التطبيق الذي يربط كل عنصر x من E بنفسه يسمى التطبيق المطابق id_E.

أي $id_E : E \to E$

$x \to x$

2-تساوي تطبيقين: Egalité de deux applications

ا -تعريف :

ليكن $f:E\to F$ و $g:H\to K$ تطبيقين :

$$f=g \Leftrightarrow \begin{cases} E=H \text{ و } K=F \\ \forall x\in E;\ f(x)=g(x) \end{cases}$$ لدينا

نقول ان f وg متساويان إذا كان لهمه نفس مجموعة الانطلاق ومجموعة الوصول و $\forall x\in E;\ f(x)=g(x)$

ب-مثال:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ..... $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to 3\cos^2 x\sin^2 x$ ..... $x\to 1-\cos^6 x-\sin^6 x$

$$1-\cos^6 x-\sin^6 x = 1-\left(\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3\right)$$

$$=1-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)$$

$$=1-\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)$$

$$=1-\left(\left(\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)-3\cos^2 x\sin^2 x\right)$$

$$=1-\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-3\cos^2 x\sin^2 x\right)$$

$$=1-1+3\cos^2 x\sin^2 x=3\cos^2 x\sin^2 x$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=g(x)$ وبالتالي $f=g$

3-قصور وتمديد تطبيق: Restriction prolongement d'un application

ا –تعاريف:

تعريف1:

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. نسمي قصور f على مجموعة جزئية E' من E التطبيق g المعرف من E' نحو F بما يلي: $\forall x \in E'; g(x) = f(x)$.

تعريف2:

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. نسمي تمديدا ل f على مجموعة E'' تتضمن E التطبيق h المعرف من E'' نحو F بما يلي: $\forall x \in E''; h(x) = f(x)$.

او بعبارة اخرى f قصور h على E.

ب-امثلة:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ، $x \to E(x)$ ، $E(x)$ هو الجزء الصحيح لx .

* قصور f على المجموعة $\mathbb{Z}$ هو $id_{\mathbb{Z}}$ لان $\forall k \in \mathbb{Z}; E(k) = k$

* قصور f على المجموعة $I_k = [k;k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$ هو f_k بحيث $\forall x \in I_k; f_k(x) = k$

التطبيق الثابت

- $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ ، $x \to -x^2$ ، $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، $x \to x^2|x-1| - x^3$

g تمديد لf على $\mathbb{R}$. لان $\forall x \in [1;+\infty[; |x-1| = x-1$

إذن $g(x) = x^2(x-1) - x^3 = -x^2 = f(x)$.

4 - الصورة المباشرة-الصورة العكسية لمجموعة جزئية بتطبيق:

ا–تعاريف:

تعريف1: L'image directe:

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. A و B جزئين من E و F على التوالي.

المجموعة الجزئية $\{f(x); x \in A\}$ من F تسمى الصورة المباشرة ل A.

و يرمز لها ب $f(A)$.

تعريف2: L'image réciproque:

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. A و B جزئين من E و F على التوالي.

المجموعة الجزئية $\{x \in E; f(x) \in B\}$ من E تسمى الصورة العكسية ل B.

و يرمز لها ب $f^{-1}(B)$.

لدينا إذن $\boxed{\forall y \in F; y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A; / f(x) = y}$

و $\boxed{\forall x \in E; x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$

ب-ملحوظة12:

لدينا $\forall (x;y) \in E \times F; f(x) = y \Leftrightarrow x \in f^{-1}(y)$

$\{f^{-1}(y)\}$ $= \{x \in E / f(x) = y\}$ هي مجموعة سوابق y.

ج-امثله

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2$ لنحدد $f([-3;2])$ و $f([-\infty;-1])$ و $f(\mathbb{Z})$

$f([-3;2]) = [0;9]$ و $f(]-\infty;-1]) = [1;+\infty[$ و $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$

لان $x \in [-3;2] \Leftrightarrow -3 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 9 \Leftrightarrow f(x) \in [0;9]$

$x \in]-\infty;-1] \Leftrightarrow x \le -1 \Leftrightarrow x^2 \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow \in f(x) \in [1;+\infty[$

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x^2 \ge 0) \wedge (x^2 \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x^2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{N}$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$x \to E(x)$

$\forall k \in \mathbb{Z}; k \le x < k+1 \Leftrightarrow E(x) = k \Leftrightarrow f(x) = k \Leftrightarrow x = f^{-1}(\{k\})$

إذن $f^{-1}(\{k\}) = [k;k+1[$

د-خاصيات:

خ.1

ليكن f تطبيق من E نحو F . ليكن A و B جزئين من E و F على التوالي . لدينا:

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$ و $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

سلسلة3 (تمرين 1).

خ.2

ليكن f تطبيق من $E \neq \varnothing$ نحو $F \neq \varnothing$. ليكن A و B جزئين من E و C و D جزئين من F

لدينا:

1- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

2- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

5- $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

سلسلة3 (تمرين 2).

٢-تطبيق تبايني-تطبيق شمولي-تطبيق تقابلي-التقابل العكسي:

ا –تعاريف:

تعريف1: تطبيق تبايني.Application injective

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. f تطبيق تبايني (او تباين) اذا كان لكل عنصر y من F سابق واحد على الاكثر في E.

بعبارة اخرى f تطبيق تبايني اذا كانت المجموعة E لا تتضمن عنصرين مختلفين لهما نفس الصورة ب f

أي $\forall(x;x')\in E^2;(f(x)=f(x'))\Rightarrow x=x'$

أو $\forall(x;x')\in E^2;x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$

تعريف2: تطبيق شمولي.Application surjective

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. fتطبيق شمولي اذا كان لكل عنصر y من F سابق واحد على الاقل في E. اي : $\forall y\in F;\exists x\in E / y=f(x)$

بعبارة أخرى fتطبيق شمولي يعني $f(E)=F$ (لان $(F\subset f(E))\wedge(f(E)\subset F)$)

تعريف3.Application bijective

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. fتطبيق تقابلي إذا كان f تطبيق تبايني و شمولي.

بعبارة أخرى لكل عنصر y من F سابق وحيدفي E.

أي: $\forall y\in F;\exists! x\in E / y=f(x)$.

2-امثلة

- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

  $n\to n+(-1)^n$

- لنبين ان f تطبيق تبايني.

$$\forall(n;n')\in\mathbb{N}^2;\ f(n)=f(n')\Rightarrow n+(-1)^n=n'+(-1)^{n'}$$

$$\Rightarrow n-n'=(-1)^{n'}-(-1)^n$$

$\Rightarrow n=n'$ (لان n و n' لهما نفس الزوجية).

اذن f تطبيق تبايني.

- لنبين ان f تطبيق شمولي.

لكل عنصر m من $\mathbb{N}$

*اذا كانm فردي يوجدسابق واحد على الأقل في $\mathbb{N}$ هو m-1 .

$f(m-1)=m-1+(-1)^{m-1}=m-1+1=m$.

* اذا كان m زوجي يوجد سابق واحد على الأقل في $\mathbb{N}$ هو m+1 .

يحقق $f(m+1)=m+1+(-1)^{m-1}=m+1-1=m$.

اذن f تطبيق شمولي. و بالتالي f تطبيق تقابلي.

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

  $x\to\dfrac{x}{1+|x|}$

- لنبين ان f تبايني أي $\forall(x;x')\in E^2;\ f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$

$$\Rightarrow\frac{x}{1+|x|}=\frac{x'}{1+|x'|}\Rightarrow x(1+|x'|)=x'(1+|x|)\ \forall(x;x')\in E^2;\ f(x)=f(x')\text{ و }xx'>0$$

$$\Rightarrow x-x'+x|x'|-x'|x|=0 \Rightarrow \begin{cases} x-x'+xx'-xx'=0 \\ \text{و} \quad \text{أ} \\ x-x'-xx'+xx'=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ x=x' \end{cases}$$ (لان x و'x لهما نفس الإشارة)

اذن f تطبيق تبايني.

- لنبين انf ليس شمولي.

لنبين ان العدد1 ليس له سابق في $\mathbb{R}$.

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|}=1 \Leftrightarrow x=1+|x| \Leftrightarrow \begin{cases} (x=1+x)\wedge(x>0) \\ \text{و} \quad \text{أ} \\ (x=1-x)\wedge(x<0) \end{cases}$$ لا يمكن

اذن f ليس شمولي .

- لنبين ان f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجموعة يجب تحديدها

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|}=y \Leftrightarrow x=y(1+|x|) \Leftrightarrow \begin{cases} (x=y+yx)\wedge(x>0) \\ \text{و} \quad \text{أ} \\ (x=y-yx)\wedge(x<0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x(1-y)=y)\wedge(x>0) \\ \text{و} \\ (x(1+y)=y)\wedge(x<0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x=\dfrac{y}{1-y}\right)\wedge(y\neq 1) \\ \text{أو} \\ \left(x=\dfrac{y}{1+y}\right)\wedge(y\neq -1) \end{cases}$$

اذن 1- و 1 ليس لهما سوابق و بالتالي فان f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

3-خا صيات :

خ.1

ليكن $f:E\to F$ تطبيق. العبارات التالية متكافئة :

P1. f تطبيق تبايني.

P2. لكل A و B جزئيين من E لدينا $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

P3. لكل A و B جزئيين من E لدينا $A\cap B=\varnothing \Rightarrow f(A)\cap f(B)=\varnothing$.

P4. لكل A جزء من E لدينا $f(\overline{A})\subset \overline{f(A)}$.

P5. لكل A جزء من E لدينا $f^{-1}(f(A))=A$.

يمكنك أن تبين أن $P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_4\Rightarrow P_5\Rightarrow P_1$.

خ.2

ليكن $f:E\to F$ تطبيق. العبارات التالية متكافئة

P1. f تطبيق شمولي.

P2. لكل A جزء من E لدينا $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$.

P3. لكل B جزء من F لدينا $f(f^{-1}(B))=B$.

يمكنك أن تبين أن $P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_1$

٤-التقابل العكسي : Bijection réciproque

ا- تعريف4 :

ليكن $f : E \to F$ تطبيق تقابلي . التطبيق الذي يربط كل عنصر y من F بسابقه الوحيد E من x هو تقابل منF نحو E يسمى التقابل العكسي ل f و نرمز له f^{-1} .

و لدينا $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$

ب-مثال :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 2x - 3$

ليكنy من $\mathbb{R}$. $f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y+3}{2}$

إذن المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ هو $\dfrac{y+3}{2}$ من اجل كلy من $\mathbb{R}$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

وبما أن $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ فان $f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2}$

ومنه $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{x+3}{2}$ هو التقابل العكسي ل f

س.12 $g :]1;+\infty[\to]2;+\infty[$

$x \to \dfrac{2x}{x-1}$ بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو $]2;+\infty[$ و حدد تقابله العكسي g^{-1} .

ا-تركيب تطبيقين:

ا-تعريف4:

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين . التطبيق hالذي يربط كل عنصر x من E بالعنصر $h(x) = g(f(x))$ يسمى مركب f وg في هذا الترتيب و نرمز له ب $h = gof$.

لدينا $x \to h(x) = gof(x)$

ب- مثلا

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 2x+1$ $\quad$ $x \to x^2 + 2x$

لنحدد $h = gof$ و $k = fog$

$\forall x \in \mathbb{R}; gof(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2 + 2(2x+1)$

$$=4x^2+4x+1+4x+2=4x^2+8x+3$$

اذن $\forall x\in\mathbb{R}; gof(x)=4x^2+8x+3$

$$\forall x\in\mathbb{R};\ fog(x)=f(g(x))=2(x^2+2x)+1=2x^2+4x+2$$

اذن $\forall x\in\mathbb{R};\ fog(x)=2x^2+2x+2$

نلاحظ ان $fog\neq gof$

ج-ملحوظة13:

- مركب تطبيقين غير تبادلي ($fog\neq gof$ عموما)
- مركبf مع نفسه هو $f^2=fof$ و يمكن كذلك تعريف $f^3;f^4;...$
- مركب 3 تطبيقات h;g;f هو $(hog)of=ho(gof)$.

د -خاصيات :

ج1- ليكن $f:E\to F$ تطبيق تقابلي.

- مركب f مع تطبيقه العكسي f^{-1} هو التطبيق المطابق id_E اي $f^{-1}of=id_E$.
- مركب f^{-1} مع تطبيقه العكسي f هو التطبيق المطابق id_F اي $fof^{-1}=id_F$.

لنبين ان $f^{-1}of=id_E$ اي $\forall x\in E; f^{-1}of(x)=id_E(x)=x$

نضع $y=f(x)$ اي $x=f^{-1}(y)$

لدينا $\forall x\in E; f^{-1}of(x)=f^{-1}(y)=x$

نفس الطريقة بالنسبة ل $fof^{-1}=id_E$.

ج2- ليكن $f:E\to F$ و $g:F\to G$ تطبيقين .

- اذاكانf و g تباينيين فان $h=gof$ و $k=fog$ تباينيين .
- اذاكانf و g شموليين فان $h=gof$ و $k=fog$ شموليين.
- اذاكانf و g تقابليين فان $h=gof$ و $k=fog$ تقابليين و $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$.

1- اذاكانf و g تباينيين

$$\forall x\in E;(gof)(x)=(gof)(x')\Rightarrow g(f(x))=g(f(x'))\Rightarrow f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$$

2- اذاكانf و g شموليين

$\forall y\in G;\exists x_1\in F/g(x_1)=y$ لان g شمولي.

$x_1\in F\Rightarrow\exists x\in E/f(x)=x_1$ لان f تبايني .

اذن $\forall y\in G;\exists x\in E/g(f(x))=y$.

3 - $g(f(x))=y\Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(y)\Leftrightarrow x=f^{-1}(g^{-1}(y))\Leftrightarrow x=f^{-1}og^{-1}(y)$

اذن $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$.

ج3- ليكن $f:E\to F$ تطبيق و Aجزء منE . لدينا

$f(\overline{A})=\overline{f(A)}\Leftrightarrow$ (f تقابل) .

نعلم ان لكل A جزء من E لدينا $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\Leftrightarrow$ f تطبيق تبايني

لكل A جزء من E لدينا $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) \Leftrightarrow$ f تطبيق شمولي.

اذن لكل A جزء من E لدينا $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Leftrightarrow$ (f تقابل) .

س.13 ليكن f تطبيق من $P(E)$ نحو $P(E)$ بما يلي $f(A) = \overline{A}$

بين ان f تطبيق تقابلي و حدد تقابله العكسي .

ليكن A و B جزئين من E بحيث $f(A) = f(B)$

$f(A) = f(B) \Rightarrow \overline{A} = \overline{B} \Rightarrow A = B$ اذن f تطبيق تبايني.

- لنبين ان f تطبيق شمولي.

ليكن C من $P(E)$ يوجد $A = \overline{C}$ بحيث $f(A) = f(\overline{C}) = \overline{\overline{C}} = C$

اذن f تطبيق شمولي .

- لنحدد التقابل العكسي.

$f(A) = \overline{A} \Leftrightarrow A = f^{-1}(\overline{A})$

التقابل العكسي هو التطبيق المعرف من $P(E)$ نحو $P(E)$ ب $f^{-1}(A) = \overline{A}$

اي $f^{-1} = f$.