ذ. رشيد البوعتاوي

rbouataoui@gmail.com

اقتراح تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

Les concepts bien acquis sont ceux à qui on a laissé le temps de naître et de se former, de problème en problème.
M. Rouche

التمرين الأول:

1- نعتبر المعادلة: $z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

أ- لدينا: $\Delta=(5+i\sqrt{3})^2-4(4+4i\sqrt{3})=6-6\sqrt{3}i$

$=3^2+(i\sqrt{3})^2-2\times3\times(i\sqrt{3})$

إذن: $\Delta=(3-i\sqrt{3})^2$

ب- المعادلة (E) تقبل حلين عقديين هما:

$$a=\frac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

و $$b=\frac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$$

ج- لدينا:

$$(1-i\sqrt{3})a=(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$$
$$=1-(i\sqrt{3})^2=4$$

إذن:

$$(1-i\sqrt{3})a=b$$

2- لدينا $A(a)$ و $B(b)$.

أ- نعتبر الدوران $r(A,\frac{\pi}{2})$ ولتكن $B_1=r(O)$.

التمثيل العقدي للدوران r هو:

$$z'=z_A+e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$$

علما أن: $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

فإن: $z'=iz+1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

بما أن: $r(O)=B_1(b_1)$

فإن: $b_1=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$.

ب- ليكن $h(A,\sqrt{3})$ التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$.

لنبين أن $h(B_1)=B$ أي أن $\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}\overrightarrow{AB_1}$

لدينا:

$$\sqrt{3}(b_1-a)=\sqrt{3}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)-(1+i\sqrt{3}))$$
$$=3-\sqrt{3}i$$

و $b-a=4-(1+i\sqrt{3})=3-i\sqrt{3}$

ومنه $b-a=\sqrt{3}(b_1-a)$

وهذا يكافئ $\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}\overrightarrow{AB_1}$

يكافئ $h(B_1)=B$

ج- لدينا $$\frac{b}{b-a}=\frac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a-a}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}$$

ونعلم أن

$$\arg(-1+i\sqrt{3})=\arg(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

و $$\arg(i\sqrt{3})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

إذن

$$\arg(\frac{b}{b-a})=\arg(-1+i\sqrt{3})-\arg(i\sqrt{3})$$
$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

نستنتج أن: $$\arg(\frac{b}{b-a})=\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

د- لتكن $C(c)$ نقطة من الدائرة المحيطة بالمثلث OAB

و $C\neq O$ و $C\neq A$.

من العلاقة

$$(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}})+(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}})+(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})=\pi[2\pi]$$

نستنتج أن $(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن المثلث OAB قائم الزاوية في A و $[OB]$ وتر للدائرة المحيطة به.

الحالة 1: إذا كانت C تنتمي إلى القوس الهندسية $[\widehat{AO}]$

التي تمر من B فإن $(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}})=\frac{\pi}{6}[2\pi]$)

$ABOC$ رباعي دائري مقعر) وبالتالي

$$\arg(\frac{c}{c-a})=\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

ذ. رشيد البوعتاوي
rbouataoui@gmail.com

الحالة 2: إذا كانت C تنتمي إلى القوس الهندسية $[\overset{\frown}{AO}]$

التي لا تمر من B فإن

$$\left(\overline{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)=\pi[2\pi] \quad (ABOC$$

رباعي دائري محدب)

ومنه $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$ وبالتالي

$$\boxed{\arg\left(\frac{c}{c-a}\right)=-\frac{5\pi}{6}[2\pi]}$$

التمرين الثاني:

x عددا صحيحا نسبيا بحيث $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1. لدينا $1436\times 1051-2015\times 749=1$

إذن حسب مبرهنة **بوزو** فإن العددين 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما (كل قاسم مشترك لهما يقسم العدد 1!)

2. ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015.

أ- لدينا :

$$2015/x^{1439}-1436 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z};\ x^{1439}-1436=k.2015$$

d/x و $d/2015 \Rightarrow d/k.2015$ و d/x^{1439}

$$\Rightarrow d/x^{1439}-k.2015 \quad \text{و}$$

$$\Rightarrow d/1436$$

ب- لدينا $d/2015$ و $d/1436$

بما أن $2015\wedge 1436=1$

فإن $d/1$ وبالتالي x و 2015 عددان أوليان فيما بينهما.

3- أ- لدينا $2015=5\times 13\times 31$ و $2015\wedge x=1$

إذن $5\wedge x=1$ $13\wedge x=1$ $31\wedge x=1$

حسب مبرهنة فيرما الصغرى:

$x^{30}\equiv 1[31]$ و $x^{12}\equiv 1[13]$ و $x^{4}\equiv 1[5]$

وبما 4 و 12 و 30 تقسم 1440 فإن

$x^{1440}\equiv 1[31]$ و $x^{1440}\equiv 1[13]$ و $x^{1440}\equiv 1[5]$

ب- لدينا $x^{1440}\equiv 1[5]$ و $x^{1440}\equiv 1[13]$ و $13\wedge 5=1$

إذن $x^{1440}\equiv 1[5\times 13]\equiv 1[65]$.

بنفس الطريقة $x^{1440}\equiv 1[31\times 65]\equiv 1[2015]$

4- لدينا

$$x^{1439}\equiv 1436[2015]\Rightarrow x^{1440}\equiv 1436.x[2015]$$
$$\Rightarrow 1436.x\equiv 1[2015]$$
$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z};\ 1436.x-k.2015=1$$

ونعلم أن : $1436\times 1051-749\times 2015=1$

$$\Rightarrow 1436(x-1051)=2015(k+749)$$
$$\Rightarrow 2015/1436(x-1051)$$
$$\Rightarrow 2015/x-1051 \quad (2015\wedge 1436=1)$$

ومنه : $\boxed{x\equiv 1051[2015]}$

التمرين الثالث:

-1

أ- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بمايلي:

$$\varphi(x)=M(x-1)$$

لدينا $\varphi(x+y)=M(x+y-1)$

و

$$\varphi(x)\mathrm{T}\varphi(y)=M(x-1)\mathrm{T}M(y-1)=M(x-1+y-1+1)$$
$$=M(x+y-1)=\varphi(x+y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

إذن

ب- لدينا φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T) و $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية

إذن $(\varphi(\mathbb{R}),\mathrm{T})$ زمرة تبادلية

من جهة أخرى φ تشاكل شمولي لأن:

$$(\forall M(x)\in E);\varphi(x+1)=M(x)$$

ومنه: $\varphi(\mathbb{R})=E$

إذن: (E,T) زمرة تبادلية.

تنبيه: شمولية φ أساسية للإجابة بشكل صحيح على هذا السؤال.

-2

أ- لتسهيل الحساب يمكن كتابة $M(x)=I+xJ$

مع $J=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ و $J^2=J$ (قم بإجراء الحساب)

لدينا: $M(x)\times M(y)=(I+xJ)\times(I+yJ)$

$$=I+yJ+xJ+xyJ^2$$
$$=I+(x+y+xy)J$$
$$=M(x+y+xy)$$

ب- لدينا $E\subset M_2(\mathbb{R})$

وبما أن

$$(\forall (M(x),M(y))\in \mathrm{E}^2,\ M(x)\times M(y)\in E$$

فإن: $(E,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

- ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$. بما أن:

$$M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)=M(y+x+yx)$$
$$=M(y)\times M(x)$$

فإن القانون "$\times$" تبادلي في E .

ج- لدينا:

$$M(z)\times(M(x)\mathrm{T}M(y))=M(z)\times M(x+y+1)$$
$$=M(x+y+2z+xz+yz+1)$$

نجد كذلك:

$$[M(z)\times M(x)]\mathrm{T}[M(z)\times M(y)]=M(x+y+2z+xz+yz+1)$$

إذن القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون " T " في E .

د- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$M(x)\mathrm{T}M(-1)=M(x-1+1)=M(x)$$

إذن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E,T)

I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$

-3

أ- ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$M(x)\times M(\frac{-x}{1+x})=M(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x})$$
$$=M(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x})=\mathrm{M}(0)$$

إذن $M(x)\times M(\frac{-x}{1+x})=I$.

ب- $(E,\mathrm{T},\times)$ جسم تبادلي:

لدينا: $(E,\mathrm{T},\times)$ حلقة واحدية لأن:

- (E,T) زمرة تبادلية
- القانون "$\times$" تجميعي وتبادلي
- القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون " T " في E .

ولكل $M(x)$ من E مع $x\neq-1$ تقبل مماثلا في $(E,\times)$ (حسب السؤال 3أ)

إذن $(E,\mathrm{T},\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع:

الجزء الأول:

f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بمايلي:

$f(0)=0$ و $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}(1+\ln^2(x))$ إذا كان $x>0$.

1- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln^2(x)=+\infty$ إذن:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{x}(1+\ln^2(x))=+\infty$$

و
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln^2(x))=+\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

-2

أ- لدينا

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x(1+\ln^2(x))=\lim_{x\to0^+}x+x\ln^2(x)=0$$
$$(\lim_{x\to0^+}x\ln^2(x)=0)$$

إذن : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\mathrm{f}(0)$ وبالتالي f متصلة على اليمين في 0.

ب- لدينا $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}1+\ln^2(x)=+\infty$

إذن (C_f) يقبل مماسا عموديا على يمين 0.

ج- f تقبل الاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ (جداء ومجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$)، ولكل $x>0$ لدينا:

$$f'x)=(x(1+\ln^2(x))'=1+\ln^2(x)+x.\frac{2\ln(x)}{x}$$
$$=1+\ln^2(x)+2\ln(x)=(1+\ln(x))^2$$

بما أن $f'(x)\geq0$ لكل $x>0$ ، وتنعدم في عدد منته من النقط 0و $\frac{1}{e}$،ومتصلة في 0 فإن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

-3

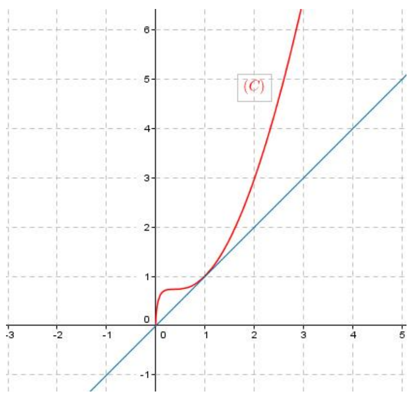
أ- بما أن f' تنعدم في e^{-1} ولا تتغير إشارتها فإن (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1} .

ب- ليكن $x>0$. لدينا:

$$f(x)-x=x(1+\ln^2(x))-x=x\ln^2(x)\geq0$$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم الذي معادلته $y=x$ على المجال $[0,+\infty[$ (لاحظ أن $f(0)=0$) ويقطعه في نقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$

ج-



الجزء الثاني:

rbouataoui@gmail.com

(u_n) المتتالية المعرفة ب: $u_0 = e^{-1}$ و $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1- لنبين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N});\ e^{-1} \le u_n < 1$.

- لدينا: $u_0 = e^{-1}$ إذن العلاقة صحيحة بالنسبة ل0

- ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $e^{-1} \le u_n < 1$ ولنبين أن $e^{-1} \le u_{n+1} < 1$ ؟

بما أن f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ فإن:

$f(e^{-1}) \le f(u_n) < f(1)$ أي $2e^{-1} \le u_{n+1} < 1$

ولدينا $e^{-1} < 2e^{-1}$ إذن $e^{-1} \le u_{n+1} < 1$

نستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ e^{-1} \le u_n < 1$

2- نعلم أن (C) فوق المستقيم الذي معادلته $y = x$ ويتقاطعان فقط في النقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$

إذن $\forall x \in]0,+\infty[\setminus \{1\}; f(x) > x$

وبالتالي $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n) > u_n$

(لأن: $(\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$)

إذن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

وبما أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة.

3- نضع $\lim_n u_n = l$.

أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا $e^{-1} \le u_n < 1$

إذن : $e^{-1} \le \lim_n u_n \le 1$

يعني : $\boxed{e^{-1} \le l \le 1}$

ب- لدينا f دالة متصلة على المجال $[e^{-1},1]$

$x \in [e^{-1},1]; f(x) = x$

و $u_0 = e^{-1} \in [e^{-1},1]$ و $f([e^{-1},1]) \subset [e^{-1},1]$

وبالتالي نهاية المتتالية (u_n) هي حل المعادلة

وحسب ما سبق فهذه المعادلة تقبل حلا وحيدا على المجال $[e^{-1},1]$ هو العدد 1.

نستنتج أن: $l = 1$.

الجزء الثالث:

1- أ- الدالة H تقبل الاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$H'(x) = (-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(x))' = x\ln(x) = h(x)$$

إذن H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.

ب- لكل $x > 0$ الدالة $t \mapsto t$ تقبل دالة أصلية على المجال $(1,x)$ ($=[x,1]$ أو $[1,x]$)، والدالة $t \mapsto \ln^2(t)$ تقبل الاشتقاق على المجال $(1,x)$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء لدينا:

$$\int_1^x t\ln^2(t)dt = \int_1^x (\frac{t^2}{2})'\ln^2(t)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x (\frac{t^2}{2})2\frac{\ln(t)}{t}dt$$

نستنتج أن:

$$\int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$$

ج- ليكن $x > 0$.

لدينا:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t(1+\ln^2(t))dt$$

$$= \int_1^x tdt + \int_1^x t\ln^2(t)dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - [H(t)]_1^x$$

إذن

$$F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

2- أ- لكل $x \ge 0$ لدينا $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

بما أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ فإن F متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

ب- لدينا:

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) = -\frac{3}{4}$$

(لأن $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{2}\ln(x) = 0$ و $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{2}\ln^2(x) = 0$)

اتصال F في النقطة 0 يعطي:

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = F(0) = \int_1^0 f(t)dt = -\frac{3}{4}$$

نستنتج أن $\int_0^1 f(t)dt = \frac{3}{4}$

ذ. رشيد البوعتاوي

rbouataoui@gmail.com

التمرين الخامس:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي:

$g(0)=\ln(2)$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ لكل $x>0$.

1- أ- ليكن $x>0$ و t عددا حقيقيا بحيث: $x\le t\le 2x$

إذن: $-2x\le -t\le -x$

وبما أن $\exp$ دالة تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}$ فإن

$e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$.

ب- ليكن $x>0$. لدينا

$$\forall t\in[x,2x];\quad e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$$

إذن $\forall t\in[x,2x];\quad \frac{e^{-2x}}{t}\le\frac{e^{-t}}{t}\le\frac{e^{-x}}{t}$

إذن $e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$

ومنه: $\ln(2)e^{-2x}\le g(x)\le\ln(2)e^{-x}$

ج- بما أن $\lim_{x\to0^+}\ln(2)e^{-2x}=\lim_{x\to0^+}\ln(2)e^{-x}=\ln(2)$

فإن $\lim_{x\to0^+}g(x)=\ln(2)=g(0)$

إذن g دالة متصلة على اليمين في0.

2- ليكن $x>0$. لدينا:

$$g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_1^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_1^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

نضع $L(x)=\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt$، الدالة L قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا: $L'(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ لكل $x>0$

بما أن $g(x)=L(2x)-L(x)$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا لكل $x>0$:

$$\begin{aligned}g'(x)&=(L(2x))'-(L(x))'\\&=(2x)'\times L'(2x)-L'(x)\\&=2L'(2x)-L'(x)\\&=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}\end{aligned}$$

نستنتج أن: $\boxed{g'(x)=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\text{ لكل } x>0}$.

3-أ- نعتبر الدالة العددية: $\psi:x\mapsto e^{-x}$

ليكن $t>0$ الدالة ψ متصلة وقابلة للاشتقاق على $[0,t]$

حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد $c_t\in]0,t[$

بحيث:

$$\psi(t)-\psi(0)=\psi'(c)(t-0)$$

أي: $e^{-t}-1=-e^{-c}\times t$ أي $\frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c}$

بتأطير العدد $-e^{-c}$ علما أن $c\in]0,t[$ نجد:

$$-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$$

نتيجة:

$$\forall t>0;\ -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$$

ب- ليكن $x>0$. لدينا:

$$\begin{aligned}g(x)-\ln(2)&=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\\&=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\end{aligned}$$

بما أن: $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ لكل $t>0$ فإن:

$$\int_x^{2x}-dt\le g(x)-\ln(2)\le\int_x^{2x}-e^{-t}dt$$

أي $\left[-t\right]_x^{2x}\le g(x)-\ln(2)\le\left[e^{-t}\right]_x^{2x}$

أي $-x\le g(x)-\ln(2)\le e^{-2x}-e^{-x}$

وبالتالي:

$$\forall x>0;\ -1\le\frac{g(x)-\ln(2)}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

ج- ليكن $x>0$. لدينا:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{g(x)-\ln(2)}{x}$$

بما أن $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}$

و $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}-1}{x}=(x\mapsto e^{-2x})'(0)$

$$=(x\mapsto -2e^{-2x})(0)=-2$$

و $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}-1}{x}=(x\mapsto e^{-x})'(0)$

$$=(x\mapsto -e^{-x})(0)=-1$$

فإن: $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=-2+1=-1$

وبالتالي: $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=-1$

نتيجة: g تقبل الاشتقاق على اليمين في 0 و لدينا

$g'_d(0) = -1$.