التمرين الأول:(3ن)

1)-تحديد مركز وشعاع الفلكة (S) :(2×0.5ن)

$$M(x,y)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-1-4-9+8=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(\sqrt{6})^2$$

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1,2,3)$ و شعاعها $R=\sqrt{6}$.

2)- لنتحقق من أن المستوى (P) مماس للفلكة (S): (0.75ن)

لدينا: $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1-2+6+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$.

ومنه المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

3)-أ-تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ):(0.5ن)

بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (P) فهو موجه بالمتجهة $\vec{n}(1,-1,2)$ المنظمية على المستوى (P) و يمر من $\Omega(1,2,3)$

إذن النظمة : $(1):\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\quad(t\in\mathbb{R})\\z=3+2t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

ب- تحديد إحداثيات ω ، نقطة تماس (P) و (S): (0.75ن)

لتكن $\omega(x,y,z)$. النقطة ω هي أيضا نقطة تقاطع (Δ) و (P).

نعوض النظمة (1) في معادلة (P)ونحصل على :

$1+t-(2-t)+2(3+2t)+1=0$ أي $6t+6=0$ ومنه $t=-1$ إذن $\omega(0,3,1)$.

التمرين الثاني : (3ن)

1)-أ-كتابة $(3-2i)^2$ على الشكل الجبري :(0.5ن)

لدينا : $(3-2i)^2=9-12i+(2i)^2=5-12i$.

ب- حل المعادلة : (1ن)

لدينا : $\Delta'=(4+i)^2-10-20i=16+8i-1-10-20i=5-12i=(3-2i)^2$

إذن : $z_1=4+i+3-2i=7-i$ و $z_2=4+i-3+2i=1+3i$ أي $S=\{z_1,z_2\}$.

2)-أ- لنبين أن : $\dfrac{c-a}{b-a}=i$ (0.5ن)

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{5+9i-1-3i}{7-i-1-3i}=\dfrac{4+6i}{6-4i}=\dfrac{2+3i}{3-2i}=\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{9+4}=\dfrac{13i}{13}=i$

ب- طبيعة المثلث ABC :(1ن)

لدينا: $\dfrac{c-a}{b-a}=i=\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$ إذن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ و $AB=AC$

ومنه المثلث ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في A .

التمرين الثالث : (2.5ن)

1)- $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\},\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2-1+1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ (0.5ن)

2)- لدينا : $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^2 (x-1+\frac{1}{x+1})dx = \left[\frac{x^2}{2}-x+ln(x+1)\right]_0^2 = ln\,3$. (1ن)

3)- $\int_0^2 x\,ln(x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2}ln(x+1)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{4}{2}ln\,3 - \frac{1}{2}ln\,3 = \frac{3}{2}ln\,3$. (1ن)

التمرين الرابع: (2.5ن)

بما أن السحب يتم تآنيا فإن كل إمكانية هي تأليفة لثلاث عناصر من بين 7 وعددها هو: $card\,\Omega = C_7^3 = 35$

- حساب $P(A)$: (0.75ن)

عدم الحصول على أية بيدقة تحمل 0 يعني سحب البيدقات الثلاثة من بين البيدقات الأربعة الغير حاملة للرقم 0 . إذن $card(A) = C_4^3 = 4$ ومنه $P(A) = \frac{4}{35}$.

- حساب $P(B)$: (0.75ن)

الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى يعني سحب بيدقة حاملة للرقم 0 وبيدقة حاملة لـ1 و بيدقة حاملة لـ1- .

إذن $card(B) = C_3^1 C_3^1 C_1^1 = 9$. ومنه $P(B) = \frac{9}{35}$.

- حساب $P(C)$: (1ن)

يكون مجموع الأرقام منعدما إذا سحبنا : إما ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى وإما إذا سحبنا ثلاث بيدقات تحمل العدد 0 .

إذن : $car(C) = card(B) + C_3^3 = 9+1 = 10$. و بالتالي : $P(C) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.

مسألة: (9ن)

I)-1-حساب $g'(x)$: (0.25ن)

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (e^{-x}+x+1)' = 1-e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ و رتابة g : (0.25×2ن)

- $\forall x \in [0,+\infty[, e^{-x} \le 1 \Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[, g'(x) \ge 0$، أي g تزايدية على $\mathbb{R}^+$
- $\forall x\,]-\infty,0], e^{-x} \ge 1 \Rightarrow \forall x \in]-\infty,0], g'(x) \le 0$ أي g تناقصية على $\mathbb{R}^-$.

2) حسب تغيرات الدالة g، لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \ge g(0)$ و $g(0)=0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \ge 0$.

و لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^{-x}+x-1 \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}+x \ge 1$. (0.25×2ن)

II)- نعتبر الدالة العددية $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$.

1)- تحديد D_f: (0.5ن)

حسب I)-2)، لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}+x \ge 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x+e^{-x} \ne 0$ إذن $D_f = \mathbb{R}$.

2)-أ-(0.25ن)

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{e^{-x}}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$.

ب- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **(0.5ن):**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}\right)=1$$ (لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$) .

- التأويل الهندسي**:(0.25ن)**

المستقيم ذو المعادلة y=1 مقارب أفقي ل (C) جوار +∞ .

- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(0.5ن):**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}\right)=0$$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}$) .

- التأويل الهندسي: **(0.25ن)**

المستقيم ذو المعادلة y=0 (محور الأفاصيل)مقارب أفقي ل (C) جوار −∞ .

3)- أ-حساب $f'(x)$ **(0.75ن):**

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\left(\frac{x}{x+e^{-x}}\right)'=\frac{x+e^{-x}-x(1-e^{-x})}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$=\frac{e^{-x}+xe^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}=\frac{(x+1)e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}$$

إذن $\forall x\in[-1,+\infty[, f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty,-1], f'(x)\leq 0$.

ب- دراسة إشارة $f'(x)$ **(0.25ن):**

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+1$:

إذن $\forall x\in[-1,+\infty[, f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty,-1], f'(x)\leq 0$.

جدول تغيرات الدالة f **(0.25ن):**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	0 ↘	$f(-1)$	↗ 1

4)-أ- معادلة المماس (T) ل (C) في O **(0.5ن):**

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

إذن معادلة (T) هي : $(T): y=x$.

ب-**(0.25ن)**

- $$\forall x\in\mathbb{R}, x-f(x)=x-\frac{x}{x+e^{-x}}=\frac{x(x+e^{-x})-x}{x+e^{-x}}$$

$$=\frac{x(x+e^{-x}-1)}{x+e^{-x}-1+1}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

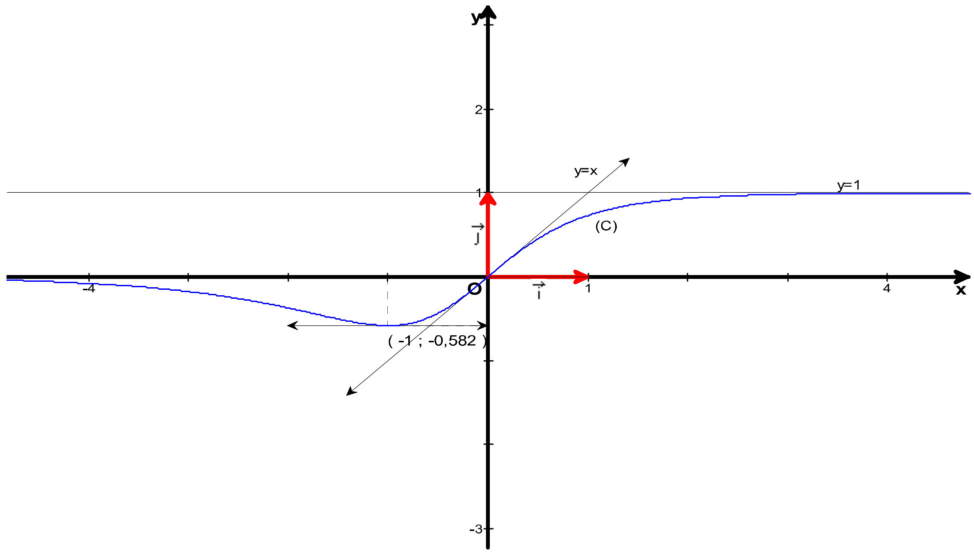
▪ (0.5ن)

إشارة $x-f(x)$ هي إشارة x إذن $\forall x \in \mathbb{R}^-, x-f(x) \le 0$ و $\forall x \in \mathbb{R}^+, x-f(x) \ge 0$

ج- الاستنتاج: (0.25ن)

على المجال $[0,+\infty[$ (C) يوجد تحت (Δ) وعلى المجال $]-\infty,0]$ (C) يوجد فوق (Δ).

5)- إنشاء المنحنى (C): (1ن) $f(0)=0, f(-1)=\frac{1}{1-e} \approx -0.6$



III)-دراسة المتتالية $(u_n)_n$

1)-لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le 1$. (0.5ن)

من أجل $n=0$ لدينا $0 \le u_0 = 1 \le 1$.

نفترض أن $0 \le u_n \le 1$ و نبين أن $0 \le u_{n+1} \le 1$.

لدينا : $0 \le u_n \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ (لأن f تزايدية على $[0,1]$).

و بما أن $f(0)=0$ و $f(1) \le 1$ و حسب السؤال II)-4-ب- فإن $0 \le u_{n+1} \le 1$.

2)- تحديد رتابة المتتالية $(u_n)_n$: (0.5ن)

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_{n+1} = u_n - f(u_n)$. وبما أن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le 1$

و حسب السؤال **II)-4-ب-** فإن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - f(u_n) \ge 0$ أي $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge u_{n+1}$

إذن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية .

3)-الاستنتاج: (0.25ن)

المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية و مصغورة بالصفر إذن فهي متقاربة .

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: (0.5ن) نضع $I=[0,1]$

لدينا $u_0 \in I$، f متصلة على I و $f(I) \subset I$ و (u_n) متقاربة،إذن نهايتها حل ل $f(x)=x$

و لدينا: $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x}{x+e^{-x}} = x \Leftrightarrow x=0$ أو $1 = x+e^{-x}$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $g(x)=0$

$\Leftrightarrow x=0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$