الثانية بكالوريا علوم رياضية	فرض تجريبي رقم 01	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الثانية: 2009/2008	نيابة الخميسات

Durée : 03h

• التمرين الأول:

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ، بحيث :

لكل $(x;y)$ من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا : $f(x)\times f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.

نفترض أن f تخالف الدالة المنعدمة ، و نعتبر a من $\mathbb{R}$ بحيث : $f(a)\neq 0$.

1)- تحقق من أن : $f(0)=0$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=\frac{1}{f(a)}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.

2)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

3)- إستنتج أن f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

4)- بين أن : $\begin{cases} f'(x)\times f(y)=f(x+y)-f(x-y) \\ f(x)\times f'(y)=f(x+y)+f(x-y) \end{cases}$; $(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2)$.

5)- بين أن f حل للمعادلة التفاضلية : $(E_\lambda): z''+\lambda z=0$ ، حيث : $\lambda=-\frac{f''(a)}{f(a)}$.

6)- بين أن : $f'(0)=2$ ، ثم حل المعادلة (E_λ) و استنتج تعبير $f(x)$ بدلالة x في كل حالة من الحالات التالية : $(i):\lambda=0$ و $(ii):\lambda>0$ و $(iii):\lambda<0$.

• التمرين الثاني:

– **الجزء الأول:**

لكل n من $\mathbb{N}$ ، نعتبر التكامل : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(x)dx$.

1)- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2)- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $I_n\geq I_{n+1}$ و $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

3)- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **الجزء الثاني:**

لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\varphi(n) = I_{n+4} - I_n$.

1)- أحسب $\varphi(n)$ بدلالة n ، لكل n من $\mathbb{N}$.

2)- أحسب المجموع : $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+2)$ بدلالة I_2 و I_{4k+2} ، لكل k من $\mathbb{N}$.

3)- إستنتج نهاية المجموع : $\sum_{q=0}^{2k}\frac{(-1)^q}{2q+1}$ عندما تؤول k إلى $+\infty$.

4)- أحسب المجموع : $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+1)$ بدلالة I_1 و I_{4k+1} ، لكل k من $\mathbb{N}$.

5)- إستنتج نهاية المجموع : $\sum_{q=1}^{2k}\frac{(-1)^{q+1}}{q}$ عندما تؤول k إلى $+\infty$.

- **الجزء الثالث:**

نعتبر التكامل : $A(\alpha) = \int_0^{\alpha}\frac{\tan x}{1-\tan x}dx$ ، حيث α عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$.

و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $K_n(\alpha) = \int_0^{\alpha}\tan^n(x)dx$ و $S_n(\alpha) = \sum_{m=1}^{n}K_m(\alpha)$.

1)- بين أن : $\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha) = A(\alpha)$; $\left(\forall\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right)$.

2)- حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث :

$$\left(\forall u\in\mathbb{R}-\{1\}\right);\ \frac{u}{(1-u)(1+u^2)} = \frac{a}{1-u} + \frac{bu+c}{1+u^2} .$$

3)- أحسب التكامل $A(\alpha)$ (يمكنك وضع : $u = \tan x$) ، ثم أحسب النهاية : $\lim_{\alpha\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-} A(\alpha)$.

4)- إستنتج أنه : $\left(\forall M\in\mathbb{R}^{+*}\right);\ \left(\exists\lambda\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) /\ A(\lambda) > 1+M$.

5)- بين أنه : $\left|A(\lambda)-S_n(\lambda)\right|<1 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}) /\ (\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq n_0$.

6)- لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k \ .$$

أ- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل α من $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$: $S_n \geq S_n(\alpha)$.

ب- إستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

abouzakariya@yahoo.fr

www.besmaths.un.ma