أولمبياد الرياضيات الجهوية – الثالثة إعدادي

الفرض الأول – الجمعة 23 دجنبر 2022 – من 14:30 إلى 15:00

3^e

EXERCICE 1 *(5 points)*

On considère trois réels strictement positifs x, y et z tels que :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2+\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3+\sqrt{5}$$

Calculer la valeur de $F=\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

التمرين 1 *(6 نقط)*

نعتبر ثلاثة أعداد حقيقية موجبة قطعا x و y و z بحيث :

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3+\sqrt{5} \quad \text{و} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2+\sqrt{5}$$

احسب قيمة $F=\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

EXERCICE 2 *(6 points)*

Soient u, v, w, x, y, z, a, b et c des nombres réels strictement positifs.

① On admettant que $\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w}\geq\frac{(x+y+z)^2}{u+v+w}$, montrer que :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

② Vérifier que :

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

③ En déduire que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

التمرين 2 *(5 نقط)*

لتكن u و v و w و x و y و z و a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا.

① نقبل أن $\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w}\geq\frac{(x+y+z)^2}{u+v+w}$. بيِّن أن :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

② تحقق أن :

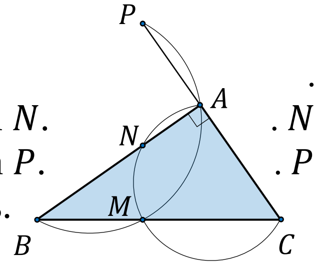
$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

③ استنتج أن $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

EXERCICE 3 *(5 points)*

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit M un point de $[BC]$.
Le cercle circonscrit au triangle ACM recoupe la droite (AB) en N.
Le cercle circonscrit au triangle ABM recoupe la droite (AC) en P.

① Montrer que les droites (MN) et (BC) sont perpendiculaires.
② Montrer que les points M, N et P sont alignés.



التمرين 3 *(5 نقط)*

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في النقطة A. لتكن M نقطة من $[BC]$.
الدائرة المحيطة بالمثلث ACM تقطع المستقيم (AB) في نقطة ثانية N .
الدائرة المحيطة بالمثلث ABM تقطع المستقيم (AC) في نقطة ثانية P .

① بيِّن أن المستقيمين (MN) و (BC) متعامدان
② بيِّن أن النقط M و N و P مستقيمية.

EXERCICE 4 *(4 points)*

Une boite contient 20 boules : 2 noires, 4 rouges, 6 vertes et 8 blanches.
Quel est le nombre minimal de boules qu'il faut tirer de la boite pour être sûr d'obtenir au moins deux boules de même couleur ?

التمرين 4 *(4 نقط)*

يحتوي صندوق على 20 كرة : 2 سوداوَين، 4 حمراوَين، 6 خضراوين و 8 بيضاوين.
ماهو العدد الأدنى من الكرات التي يتعيَّن سحبها من الصندوق لنكون متأكدين من الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون ؟

أولمبياد الرياضيات الجهوية – الثالثة إعدادي – الفرض الأول – عناصر الحل

3e

Pour les quatre exercices, toute autre méthode correcte est naturellement considérée comme valable.

EXERCICE 1 *(5 points)*

De $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2+\sqrt{5}$ on tire $yz+zx+xy=(2+\sqrt{5})xyz$ ....(1,5 pt)

De $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3+\sqrt{5}$ on tire $z+x+y=(3+\sqrt{5})xyz$....................(1,5 pt)

Donc : $F=\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}=\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-1$....................(2 pts)

EXERCICE 2 *(6 points)*

❶ On a : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$ ....(1,5 pt)

❷ On a : $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ et :

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca}{2}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.......(1,5 pt)

Ainsi, on voit que : $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

❸ On a : $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq 0$ donc $\frac{(a+b+c)^2}{b+bc+ca}\geq 3$ ....(1,5 pt)

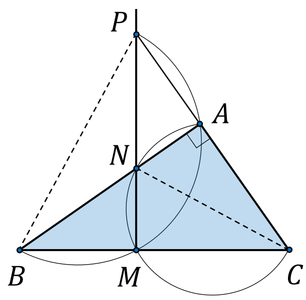
Donc $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{1}{2}\frac{(a+b+c)^2}{b+bc+ca}\geq\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$ ....(1,5 pt)

Remarque

• $\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}\geq\frac{(x+y)^2}{u+v}$; $\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w}\geq\frac{(x+y+z)^2}{u+v+w}$ ... *sont dites inégalités de Titu. Il est conseillé de les retenir.*

• $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ *est dite inégalités de Nesbitt. Elle se démontre de plusieurs manières.*

EXERCICE 3 *(5 points)*



❶ On a $\widehat{CAN}=90°$ donc $[CN]$ est un diamètre du cercle inscrit dans CMN. Donc $(MN)\perp(BC)$ ......(2 pts)

❷ De même $\widehat{BAP}=90°$ donc $[BP]$ est un diamètre du cercle inscrit dans BMP. $(MP)\perp(BC)$.........(1 pts)

$(MN)\perp(BC)$ et $(MP)\perp(BC)$ donc $(MN)\parallel(MP)$ donc $(MN)=(MP)$....................(2 pts)

Les points M, N et P sont alignés.

EXERCICE 4 *(4 points)*

◦ Le nombre minimal de boules qu'il faut tirer pour être sûr d'obtenir au moins deux boules de même couleur est égal à 5....................(2 pts)

◦ En effet, en tirant 4 boules, deux cas se présentent :

• deux d'entre-elles sont de même couleur (et le problème est réglé) ;

• les 4 boules sont de couleurs différentes, la 5e boule tirée est soit noir, soit rouge, soit verte, soit blanche. Ainsi, on aura nécessairement deux boules de même couleur.................(2 pts)