الصفحة
1 / 5

الامتحان التجريبي الخامس لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2018

المادة	الرياضيات	المعامل	9
الشعبة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز	4

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات...(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية..(3.50 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية ....(3.50 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل ....(5.25 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(4.75 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذين : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

التمرين الأول: (3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $(E): 2018x+2017y=2$.

✓ حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) مبرزاً مراحل الحل. 0.75 ن

II- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $(F): 2016x^{1009}+x-2\equiv 0[2018]$.

وليكن x حلا للمعادلة (E).

1) بين أن : $x\wedge 2018=2$. 0.50 ن

2) -a بين أن : $(\forall x\in\mathbb{Z});\ x^{1009}\equiv x[2018]$ 0.50 ن

-b بين أن : $(F)\Leftrightarrow 2017x\equiv 2[2018]$. 0.50 ن

-c استنتج مجموعة حلول المعادلة (F). 0.25 ن

3) حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $(S):\begin{cases}(x+2)^{1009}\equiv 6[1009]\\ x\equiv 2[2017]\end{cases}$. 0.50 ن

التمرين الثاني : (3,5 نقط)

I- نزود $\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall(c,d)\in\mathbb{R}^2:\ (a+ib)\perp(a'+ib')=aa'+i(ab'+ba')$$

1) -a بين أن القانون $\perp$ تبادلي وتجميعي. 0.50 ن

-b بين أن القانون $\perp$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.50 ن

-c نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي : $E=\{z\in\mathbb{C}/\ \mathcal{Re}(z)\neq 0\}$.

✓ بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية. 0.50 ن

2) نعتبر المجموعة $\mathcal{H}$ المعرفة بما يلي : $\mathcal{H}=\{z=a+ia\ln(a)/\ a\in\mathbb{R}^*\}$.

✓ بين أن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من الزمرة $(E,\perp)$. 0.50 ن

II- نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية ونضع : $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $\mathcal{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

لكل عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ نضع : $\mathcal{M}(z)=\begin{pmatrix}a+b&0&-b\\b&a&-b\\b&0&a-b\end{pmatrix}$.

ونعتبر المجموعة : $F=\{\mathcal{M}(z)/\ z\in\mathbb{C}\}$.

-a نضع : $A=\mathcal{M}(i)$.

✓ بين أن $A^2=\mathcal{O}$ وأن : $\mathcal{M}(z)=a\mathcal{I}+bA$. — 0.50 ن

-b استنتج أن : $\mathcal{M}(z)\times\mathcal{M}(z')=\mathcal{M}(z\perp z')$; $(\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2)$. — 0.25 ن

-c بين أن $(F,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية غير كاملة. — 0.75 ن

التمرين الثالث: (3,5 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$(E_m): z^2-(1+2m+im)z+2m(1+im)=0$، حيث : $m\in\mathbb{C}$.

1) تحقق أن مميز المعادلة (E_m) هو : $\Delta=(1-2m+im)^2$. — 0.50 ن

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m). — 0.25 ن

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي $-i$ و $b=\dfrac{2m}{1+im}$ و m بحيث : $m\in\mathbb{C}-\{i\}$.

1) a- بين أن : $|m|^2=\mathcal{I}\mathrm{m}(m) \Leftrightarrow b\in\mathbb{R}$. — 0.25 ن

-b استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون b عدد حقيقي. — 0.25 ن

2) a- بين أن النقط A و M و O مستقيمية إذا وفقط إذا كان $m\in i\mathbb{R}$. — 0.25 ن

-b بين أنه إذا كانت $m\neq 0$ فإن $\dfrac{m+i}{2m}=\dfrac{b+i}{b}$ — 0.25 ن

-c استنتج أنه إذا كانت $m\notin i\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و O و M متداورة. — 0.50 ن

3) ليكن F_M التطبيق من المستوى $P-\{O\}$ نحو المستوى P والذي يربط كل نقطة $M'(z')$ بالنقطة $M''(z'')$ حيث : $z''=(1+im)z'$.

-a حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون التطبيق F_M دوران. — 0.25 ن

-b بين أنه إذا كان $z'\neq 0$ فإن $z''\neq z'$. — 0.25 ن

-c بين أن المستقيمان (OM') و $(M'M'')$ متعامدان. — 0.25 ن

-d استنتج أن : $1+im=\sqrt{1+m^2}\,e^{i\times Arc\tan(m)}$. — 0.50 ن

التمرين الرابع: (5,25 نقط)

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f_n(x)=x^2e^{\frac{-n^2}{x^2}} \quad \text{و} \quad f_n(0)=0$$

وليكن $\left(C_{f_n}\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و $\|\vec{i}\|=1\ cm$.

0.50 ن **1)** بين أن الدالة f_n متصلة وقابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

0.50 ن **2) a-** أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

0.50 ن **b-** أعط جدول تغيرات الدالة f_n.

0.50 ن **c-** أنشئ المنحنى $\left(C_{f_1}\right)$.

0.50 ن **3) a-** بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي $\alpha_n>1$ بحيث :
$f_n(\alpha_n)=1$.

0.50 ن **b-** بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$ تزايدية. هل المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$ متقاربة ؟ علل جوابك.

0.75 ن **c-** بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);\ \alpha_n\geq\frac{n}{\sqrt{2\ln(n)}}$، ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$.

0.25 ن **4) a-** بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ 2\alpha_n^2\ln(\alpha_n)=n^2$.

0.25 ن **b-** بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ \ln(2)+2\ln(\alpha_n)+\ln(\ln(\alpha_n))=2\ln(n)$.

0.50 ن **c-** استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln n}=1$.

0.50 ن **5)** باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)$.

التمرين الخامس: (4,75 نقط)

I- لتكن f دالة معرفة ومتصلة وتناقصية على المجال $[0;1]$.

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0;1]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

ولتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ v_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

0.75 ن **1) a-** بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ولكل k من $\{1,\ldots,n-1\}$ لدينا :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.75 ن **b-** بين أن : $F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\le v_n\le F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ ؛ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$.

2) نفترض أن : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ و $\lim\limits_{x\to0^+}xf(x)=0$.

0.25 ن بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محدداً نهايتها.

3) نفترض في هذا السؤال أن : $f(x)=\frac{x^2-1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ ؛ $\left(\forall x\in]0;1]\right)$.

نذكر أن : $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

0.50 ن **a-** بين أن : $v_n=\frac{(n+1)(2n+1)-6n^2}{24n^2}-\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ ؛ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

1.00 ن **b-** بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{3}$ ، ثم استنتج أن المتتالية $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محدداً نهايتها.

II- في هذا الجزء نفترض أن f دالة معرفة ومتصلة وتزايدية على المجال $[0;\pi]$.

0.50 ن **1) a-** بين أن : $\frac{2}{n}=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}(-1)^k\sin(nx)\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\left|\sin(nx)\right|dx$.

0.25 ن **b-** بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ولكل k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$ لدينا :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\le\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}f(x)\left|\sin(nx)\right|dx\le\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 ن **2) a-** استنتج تأطيراً لـ $\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(nx)\right|dx$.

0.50 ن **b-** استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(nx)\right|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$.

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺