تصحيح امتحان الدورة الاستدراكية يوليوز 06

التمرين الاول:

1) أ– لدينا : $\overrightarrow{AB}(0,-3,3)$ و $\overrightarrow{AC}(1,-1,0)$. اذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3,3,3)}$ 0.5

ب– لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) اذن :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$$
$$\Leftrightarrow 3.(x-1)+3.(y-2)+3.(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 3.(x+y+z-1)=0$$

وبالتالي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي : $\boxed{x+y+z-1=0}$ 0.5

2) أ– مسافة المركز $\Omega(1,1,1)$ الى المستوى (ABC) هي: $d=\dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

إذن : $d=R$ ومنه : المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في نقطة H . 0.5

هذه النقطة هي تقاطع المستوى (ABC) مع المستقيم (ΩH) ذو تمثيل برامتري : $(t\in IR)$ $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$

بحل النظمة : $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\\x+y+z-1=0\end{cases}$ نجد : $t=\dfrac{-2}{3}$ اذن: $\boxed{H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})}$ 0.75

ب– لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوى (ABC).

لدينا إذن : $\begin{cases}a+b+c-1=0\\d(M,\Omega)\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}a+b+c-1=0\\(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq\dfrac{4}{3}\end{cases}$ أي:

$\begin{cases}a+b+c=1\\a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3\geq\dfrac{4}{3}\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a+b+c=1\\a^2+b^2+c^2-2+3\geq\dfrac{4}{3}\end{cases}$

وبالتالي: $\boxed{a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{3}}$ 0.75

التمرين الثاني:

1) لكل n من IN لدينا:

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{5}.u_{n+1}=(\frac{2}{5}.u_{n+1}-\frac{1}{25}.u_n)-\frac{1}{5}.u_{n+1}$$
$$=\frac{1}{5}.u_{n+1}-\frac{1}{25}.u_n=\frac{1}{5}.(u_{n+1}-\frac{1}{5}.u_n)$$

اذن : $\boxed{v_{n+1}=\dfrac{1}{5}.v_n}$

وبالتالي: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{5}$ وحدها الأول: $v_0=u_1-\dfrac{1}{5}.u_0=1$ 0.5

إذن: $\boxed{\forall n\in IN: v_n=(\frac{1}{5})^n}$ 0.25

2) أ– لكل n من IN لدينا : $w_{n+1}=5^{n+1}.u_{n+1}=5^{n+1}.(v_n+\dfrac{1}{5}.u_n)=5^{n+1}.\dfrac{1}{5^n}+5^n.u_n$

إذن: $\boxed{w_{n+1}=5+w_n}$ وبالتالي: (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=5$ وحدها الأول: $w_0=0$ 0.25

ب– لدينا: $\boxed{(\forall n\in IN: w_n=5.n)}$ 0.25 إذن: $(\forall n\in IN: u_n=\dfrac{w_n}{5^n})$

أي: $\boxed{\forall n \in IN^* : u_n = \frac{5.n}{5^n} = \frac{n}{5^{n-1}}}$ 0.25

3) أ‌- لكل n من IN^* لدينا : $5.n \succ 0$ إذن : $\boxed{\forall n \in IN^* : u_{n+1} \succ 0}$ 0.25

ولكل n من IN^* لدينا : $u_{n+1} - \frac{2}{5}.u_n = \frac{n+1}{5^n} - \frac{2.n}{5^n} = \frac{1-n}{5^n}$ إذن: $u_{n+1} - \frac{2}{5}.u_n \leq 0$

وبالتالي: $\boxed{\forall n \in IN^* : 0 \prec u_{n+1} \leq \frac{2}{5}.u_n}$ 0.5

ب- من أجل : $n = 1$ لدينا: $u_1 = 1$ إذن : $0 \prec u_1 \leq (\frac{2}{5})^0$

لنفرض أن الخاصية محققة من أجل $n \in IN^*$.

لدينا حسب أ) $0 \prec u_{n+1} \leq \frac{2}{5}.u_n$ لذن: $0 \prec u_{n+1} \leq \frac{2}{5}.u_n \leq \frac{2}{5}.(\frac{2}{5})^{n-1}$ إذن: $0 \prec u_{n+1} \leq (\frac{2}{5})^n$

إذن الخاصية محققة بالنسبة ل : $n+1$

وبالتالي: $\boxed{\forall n \in IN^* : 0 \prec u_{n+1} \leq (\frac{2}{5})^n}$ 0.5

بما أن $-1 \prec \frac{2}{5} \prec 1$ فان : $\lim_{n \to +\infty} (\frac{2}{5})^{n-1} = 0$ إذن حسب مصاديق التقارب: (u_n) متقاربة

و : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$ 0.25

التمرين الثالث:

إذا سحبنا بيدقة تخمل الرقم 2 فإننا نسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2 إذن يمكن الحصول على 0 أو بيدقة أو بيدقتين لونها أحمر.

و إذا سحبنا بيدقة تحمل الرقم 3 فإننا نسحب 3بيدقات في آن واحد من الكيس U_2 إذن يمكن الحصول على 0 أو بيدقة أو بيدقتين لونها أحمر.

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2 ومنه: $\boxed{X(\Omega) = \{0,1,2\}}$ 0.5

* الحدث : $[X=0]$ هو الحدث : " لا نحصل على أية كرة حمراء" أي نسحب بيدقة تحمل الرقم 2من الكيس U_1 ونسحب بيدقتين بيضاوين في آن واحد من الكيس U_2 $\boxed{\text{أو}}$ نسحب بيدقة تحمل الرقم 3 من الكيس U_1 ونسحب 3 بيدقات بيضاء في آن واحد من الكيس U_2.

إذن : $p[X=0] = \frac{3}{5}.\frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{2}{5}.\frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{3}{5}.\frac{3}{10} + \frac{2}{5}.\frac{1}{10} = \frac{11}{50}$ 0.75

* لكي يتحقق الحدث : $[X=1]$ يجب سحب بيدقة تحمل الرقم 2 من U_1 وسحب بيدقة حمراء وبيدقة بيضاء من U_2

$\boxed{\text{أو}}$ سحب بيدقة تحمل الرقم 3 من U_1 وسحب (بيدقة حمراء وبيدقتين بيضاء) من U_2 إذن:

$p[X=1] = \frac{3}{5}.\frac{C_3^1.C_2^1}{C_5^2} + \frac{2}{5}.\frac{C_3^2.C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}.\frac{6}{10} + \frac{2}{5}.\frac{6}{10} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ 0.75

* لكي يتحقق الحدث : $[X=2]$ يجب سحب بيدقة تحمل الرقم 2 من U_1 وسحب بيدقتين حمراوين من U_2 $\boxed{\text{أو}}$ سحب بيدقة تحمل الرقم 3 من U_1 وسحب (بيدقتين حمراوين وبيدقة بيضاء) من U_2 إذن:

$p[X=2] = \frac{3}{5}.\frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{2}{5}.\frac{C_2^2.C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}.\frac{1}{10} + \frac{2}{5}.\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$ 0.75

وبالتالي : جدول قانون احتمال المتغير العشوائي X هو :

$a \in X(\Omega)$	0	1	2
$p[X=a]$	$\frac{11}{50}$	$\frac{30}{50}$	$\frac{9}{50}$

2) الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=0.\frac{11}{50}+1.\frac{30}{50}+2.\frac{9}{50}=\frac{48}{50}=\frac{24}{25}$

أي: $\boxed{E(X)=\frac{24}{25}}$ 0.25

التمرين الرابع:

1) مميز المعادلة هو: $\Delta=4-4(1+i)=-4i$ 0.25

اذن : $\Delta==2.(-2i)=2.(1-i)^2=(\sqrt{2}.(1-i))^2$. إذن احد الجذور المربعة ل Δ هو $\delta=\sqrt{2}.(1-i)$

والحلول هي : $z_1=\frac{-2-\sqrt{2}.(1-i)}{2}$ و $z_2=\frac{-2+\sqrt{2}.(1-i)}{2}$ (لأن : $\mathrm{Im}(z_1)\succ 0$)

وبالتالي : $\boxed{z_1=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.i}$ 0.25 و $\boxed{z_2=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.i}$ 0.25

2) أ- لدينا : $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.i=-\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{4})$

اذن: $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.i=\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})=\left[1,\frac{3\pi}{4}\right]}$ 0.5

ب- z_M يرمز للحق النقطة M.

لدينا : $z_{M_1}-z_A=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.i+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.i=z_B-z_O$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}}$ 0.25

بما أن : $\frac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2}=\frac{-2}{2}=-1=z_A$ فان : A هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$ 0.25

ج- بما أن : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$ فان : $AOBM$ متوازي أضلاع وبما أن : $OB=OA=1$

فان: $AOBM$ معين. 0.5

لدينا: $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM_1})\equiv(\vec{e_1},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM_1})\equiv\frac{3\pi}{4}+\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}[2\pi]$

إذن : $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM_1})\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]$. اذن : $\boxed{Argz_1\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]}$ 0.5

مسألة

I-

1) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية : $y''-2y'+y=0$ هي : $r^2-2r+1=0$ وهي تقبل حلا مزدوجا : $r=1$

0.25

إذن حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة ب: $\boxed{y:x\mapsto(ax+b)e^x}$ حيث $(a,b)\in IR^2$. 0.5

2) أ- لدينا: $\forall x\in IR:(y_0'(x)=a$ و $y_0''(x)=0)$ إذن:

y_0 حل للمعادلة التفاضلية $\Leftrightarrow$ $\forall x\in IR:y_0''(x)-2y_0'(x)+y_0(x)=x-1$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in IR:-2a+ax+b=x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b-2a=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

إذن : $\boxed{y_0:x\mapsto x+1}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) . 0.25

ب- الحلول العامة للمعادلة التفاضلية هي الدوال y المعرفة ب:

$\boxed{y:x\mapsto(ax+b)e^x+x+1 \text{ حيث: } (a,b)\in IR^2}$ 0.25

ج- لدينا : $\forall x\in IR:\begin{cases}h(x)=(ax+b)e^x+x+1\\h'(x)=(ax+a+b)e^x+1\end{cases}$

إذن: $\begin{cases} h(0)=0 \Leftrightarrow b+1=0 \Leftrightarrow b=-1 \\ h'(0)=1 \Leftrightarrow a+b+1=1 \Leftrightarrow b=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

وبالتالي : $\boxed{\forall x \in IR : h(x)=(x-1)e^x+x+1}$ 0.5

3) أ- لدينا : $\forall x \in IR : g'(x)=e^x+(x-1)e^x+1$

إذن: $\boxed{\forall x \in IR : g'(x)=xe^x+1}$ 0.5

بما أن : $\forall x \in [0,+\infty[: xe^x+1 \succ 0$ فان $\boxed{g \text{ دالة تزايدية قطعا على } [0,+\infty[\quad 0.25}$

ب- بما أن g دالة تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ فان : $g(0)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $[0,+\infty[$

إذن: $\forall x \in [0,+\infty[: g(x) \geq g(0)$

وبما أن : $g(0)=0$ فان: $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[: g(x) \geq 0}$. 0.25

II- 1) لكل x من IR^* لدينا $-x \in IR^*$ و :

$$f(-x)=\frac{-xe^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}=\frac{\frac{-x}{e^x}}{(\frac{1}{e^x}-1)^2}=-\frac{\frac{x}{e^x}}{(\frac{1-e^x}{e^x})^2}=-\frac{x}{e^x}.\frac{e^{2x}}{(e^x-1)^2}-\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$$

إذن: $\boxed{\forall x \in IR^* : f(-x)=-f(x)}$ وبالتالي $\boxed{f \text{ دالة فردية} \quad 0.5}$

2) أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2.e^x}{x.(e^x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}.\frac{1}{(\frac{e^x-1}{x})^2}=+\infty$ 05

اذن المستقيم ذو معادلة $x=0$ مقارب للمنحنى 0.25

لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$

ب- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x.(1-e^{-x})^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}.\frac{1}{(1-e^{-x})^2}=0$ 0.25

لأن : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-e^{-x})^2=1$. اذن المستقيم ذو معادلة $y=0$ مقارب للمنحنى 0.25

3) أ- لدينا:

$$\forall x \in IR^* : f'x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)^2-2xe^{2x}(e^x-1)}{(e^x-1)^4}=\frac{(e^x-1)[(e^x-1)(e^x+xe^x)-2xe^{2x}}{}$$

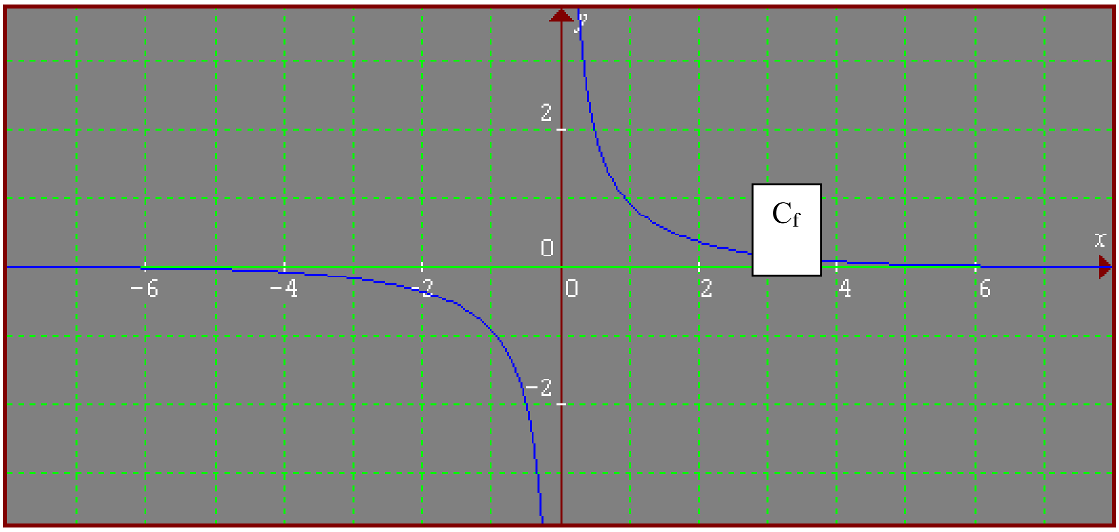
$$=\frac{e^{2x}+xe^{2x}-e^x-xe^x-2xe^{2x}}{(e^x-1)^3}=e^x.\frac{e^x-xe^x-x-1}{(e^x-1)^3}$$

إذن: $\boxed{\forall x \in IR^* : f'(x)=-\frac{e^{x.}}{(e^x-1)^3}.g(x)}$ 0.75

ب- على المجال : $]0,+\infty[$ لدينا: $e^x-1 \succ 0$ و $e^x \succ 0$ و $g(x) \succ 0$ إذن: $f'(x) \prec 0$ وبالتالي: جدول تغيرات هو كالتالي: 0.5

x		0	$+\infty$
f'(x)		−	
f(x)		$+\infty$ ↘	0

4) منحنى الدالة f : 0.5



5) أ- لدينا : $\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)}dt = \int_2^3 (\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t})dt = [\ln(t-1)-\ln t]_2^3$

$$= \left[\ln(\frac{t-1}{t})\right]_2^3 = \ln(\frac{2}{3})-\ln(\frac{1}{2}) = \ln 2-\ln 3+\ln 2 \quad = \quad \boxed{2\ln 2-\ln 3}$$ 0.5

ب- نضع : $t=e^x$ إذن: $x=\ln t$ و $dx=\frac{1}{t}dt$ و $f(x)=\frac{t.\ln t}{(t-1)^2}$

ولدينا : $\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=\ln 2 \\ x=3 \Rightarrow t=\ln 3 \end{cases}$

إذن : $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \int \frac{t.\ln t}{(t-1)^2}.\frac{1}{t}dt = \int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}dt$ 0.5

6) أ- نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=\frac{1}{(t-1)^2} \end{cases}$ و $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=\frac{-1}{t-1} \end{cases}$

إذن : $\int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}dt = \left[\frac{-\ln t}{t-1}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{-1}{t(t-1)}dt$

$$= \frac{-\ln 3}{2}+\ln 2+2\ln 2-\ln 3$$

إذن : $\boxed{\int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}dt = 3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}$ 0.5

ب- بما أن الدالة f موجبة ومتصلة على المجال $[2,3]$ فان: المساحة المطلوبة هي : $A=\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$

إذن المساحة هي : $\boxed{A=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}$ بوحدة المساحة.أي $\boxed{A=0.45\ u.a}$ 0.5