

التمرين الأول :

لتكن G مجموعة مصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ حيث : $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

1- I. نعتبر $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من المجموعة G . لدينا :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc, bd)} \quad \text{إذن : } M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} = M_{(a+bc, bd)}$$

وبما أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ؛ فإن $bd \neq 0$ ؛ ومنه نستنتج أن $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} \in G$.

وعليه فإن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة. إذن $\times$ قانون تجميعي في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ و $I = M_{(0,1)}$ هو

العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ؛ وبما أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ و $I = M_{(0,1)} \in G$ فإن $\times$ قانون تجميعي في $(G, \times)$ و I هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في $(G, \times)$.

ليكن $M_{(a,b)}$ عنصرا من G . لدينا : $\det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b \neq 0$ إذن $M_{(a,b)}$ يقبل مقلوبا في

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times) \text{ ؛ ولدينا : } \left(M_{(a,b)}\right)^{-1} = \frac{1}{\det(M_{(a,b)})} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$$

ومنه فإن $\left(M_{(a,b)}\right)^{-1} = M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in G$ هو مقلوب $M_{(a,b)}$ بالنسبة للقانون $\times$ في $(G, \times)$.

وبالتالي فإن : $(G, \times)$ زمرة .

بما أن : $M_{(2,3)} \times M_{(4,1)} = M_{(14,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$ و $M_{(4,1)} \times M_{(2,3)} = M_{(6,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ فإن :

$M_{(2,3)} \times M_{(4,1)} \neq M_{(4,1)} \times M_{(2,3)}$ وعليه فإن القانون $\times$ ليس تبادليا في $(G, \times)$.

3. لدينا : $H = \left\{ M_{(a,b)} \in G \mid (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \right\}$ إذن :

$H \neq \emptyset$ لأن $I = M_{(0,1)} \in H$ و $H \subset G$.

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من المجموعة H . لدينا :

$$M_{(a,b)} \times \left(M_{(c,d)}\right)^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)} = M_{\left(a - \frac{bc}{d}, \frac{b}{d}\right)}$$

ومنه فإن : $M_{(a,b)} \times \left(M_{(c,d)}\right)^{-1} \in H$ وبالتالي فإن $(H, \times)$ زمرة جزئية من $(G, \times)$.

4. لدينا : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = M_{(a,1)} \in G$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

ولدينا : $A^2 = M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} = M_{(2a,1)}$ و $A^3 = A^2 \times A = M_{(2a,1)} \times M_{(a,1)} = M_{(3a,1)}$

ومنه نظن أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : A^n = M_{(na,1)}$. وبالفعل إذا افترضنا أن $A^n = M_{(na,1)}$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛

فإن : $A^{n+1} = A^n \times A = M_{(na,1)} \times M_{(a,1)} = M_{((n+1)a,1)}$ وحسب مبدأ التراجع فإن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : A^n = M_{(na,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$$

II- لدينا : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* ; \forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* ; (a,b)T(x,y) = (a+bx, by)$

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ M_{(a,b)} &\mapsto (a,b) \end{aligned}$$

1. ليكن (a,b) و (c,d) عنصرين من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) &= \varphi(M_{(a+bc, bd)}) = (a+bc, bd) = (a,b)T(c,d) = \varphi(M_{(a,b)}) \times \varphi(M_{(c,d)}) \\ \text{إذن } \varphi &\text{ تشاكل من } (G, \times) \text{ نحو } (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T) \end{aligned}$$

$$\varphi(M_{(a,b)}) = (c,d) \Leftrightarrow (a,b) = (c,d)$$

$$\Leftrightarrow a=c \text{ و } b=d$$

ولدينا :

$$\Leftrightarrow M_{(a,b)} = M_{(c,d)}$$

إذن φ تقابل من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

2. لدينا φ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$ و $(G, \times)$ زمرة ؛ إذن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$ زمرة .

3. ليكن $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} (a,1)T(a,1)T\dots(a,1) &= \varphi(M_{(a,1)})T\varphi(M_{(a,1)})T\dots\varphi(M_{(a,1)}) \\ &= \varphi(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \dots \times M_{(a,1)}) \\ &= \varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^n\right) \\ &= \varphi(M_{(na,1)}) \\ &= (na,1) \end{aligned}$$

ومنه فإن مماثل $(a,1)T(a,1)T\dots T(a,1) = (na,1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$ هو :

$$(na,1)' = \left(\varphi(M_{(na,1)})\right)' = \varphi\left(\left(M_{(na,1)}\right)^{-1}\right) = \varphi(M_{(-na,1)}) = (-na,1)$$

التمرين الثاني :

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: المعادلة : $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

1. ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . نضع : $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$. إذن : $a \wedge b = 1$ لأن :

حسب Bezout ؛ لدينا : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 / xu + yv = d$. إذن : $adu + bdv = d$ ولدينا $d \in \mathbb{N}^*$. إذن :

$au + bv = 1$. حسب مبرهنة Bezout العكسية فإن : $a \wedge b = 1$.

$$x^2(x+y) = y^2(x-y)^2 \Rightarrow a^2d^2(ad+bd) = b^2d^2(ad-bd)^2$$

$$\Rightarrow a^2d^3(a+b) = b^2d^4(a-b)^2$$

أ- لدينا :

$$\Rightarrow a^2(a+b) = db^2(a-b)^2$$

ب- لدينا : $a \wedge b = 1$ ؛ إذن : $a^2 \wedge b = 1$. حسب (أ) نستنتج أن :

$$a^2(a+b) = db^2(a-b)^2 \Rightarrow b/a^2(a+b)$$

$$\xRightarrow{\text{Gauss}} b/(a+b)$$

$$\Rightarrow b/a ; (b/(a+b-b)) : \text{لأن}$$

ومنه فإن : $a \wedge b = b$ ولدينا $a \wedge b = 1$ إذن : $\boxed{b=1}$.

ج- نعوض b ب 1 في العلاقة (1 - أ) فنحصل على : $d(a-1)^2 = (a+1)a^2$: (*) .

نفترض أن $a=1$. إذن : $(a+1)a^2 = 0$ ومنه $a=-1$ أو $a=0$ وهذا يتناقض مع كون $a \in \mathbb{N}^*$ حيث $x \in \mathbb{N}^*$ إذن : $\boxed{a \neq 1}$. ومن العلاقة (*) نجد : $(a-1)/(a+1)a^2$ وبما أن $a-(a-1)=1$ فإنه حسب Bezout :

لدينا : $a \wedge (a-1) = 1$ ومنه $a^2 \wedge (a-1) = 1$. وحسب Gauss نجد : $(a-1)/(a+1)$.

د- لدينا : $(a-1)/(a+1)$ ومنه : $(a-1)/(a+1) - (a-1)$ أي : $(a-1)/2$ و 2 أولي . إذن : $a-1=2$ أو $a-1=1$.

وبالتالي فإن : $\boxed{a=2}$ أو $\boxed{a=3}$.

2. لنحل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . نضع : $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$. حسب السؤال الأول : لدينا : $b=1$ و $\boxed{a=2}$ أو $\boxed{a=3}$.

إذا كان $a=2$: فإن $x = 2d$ و $y = d$. إذن : $(x, y) = (2d, d)$ حل ممكن للمعادلة (E) .

إذا كان $a=3$: فإن $x = 3d$ و $y = d$. إذن : $(x, y) = (3d, d)$ حل ممكن للمعادلة (E) .

لنتحقق من الحلول الممكنة :

في حالة $a=2$: لدينا :

$$[(x, y) \text{ حل للمعادلة (E)}] \Leftrightarrow (2d, d) \Leftrightarrow (2d)^2(2d+d) = d^2(2d-d)^2 \Leftrightarrow 12d^3 = d^4 \Leftrightarrow d = 12 \left(d \in \mathbb{N}^* \right)$$

إذن : $(x, y) = (24, 12)$ حل للمعادلة (E) .

في حالة $a=3$: لدينا :

$$[(x, y) \text{ حل للمعادلة (E)}] \Leftrightarrow (3d, d) \Leftrightarrow (3d)^2(3d+d) = d^2(3d-d)^2 \Leftrightarrow 36d^3 = 2d^4 \Leftrightarrow d = 18 \left(d \in \mathbb{N}^* \right)$$

إذن : $(x, y) = (54, 18)$ حل للمعادلة (E) . وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(24, 12) ; (54, 18)\}$$

✍ التمرين الثالث : ✍

نضع : $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = z^2 - (2+6i)z$

I - في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ؛ نعتبر المجموعة :

$$H = \{M(z) \in \mathcal{P} / P(z) \in i\mathbb{R}\}$$

1. ليكن $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا . لدينا :

$$M(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overline{P(z)} = -P(z)$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}^2 - (2-6i)\overline{z} = -z^2 + (2+6i)z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \overline{z}^2 - (2-6i)\overline{z} - (2+6i)z = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \overline{z}^2 - 2(z + \overline{z}) - 6i(z - \overline{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + \overline{z})^2 - 2z\overline{z} - 2(z + \overline{z}) - 6i(z - \overline{z}) = 0$$

$$M(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (2\Re(z))^2 - 2|z|^2 - 2(2\Re(z)) - 6i(2i\Im(z)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -|z|^2 + 2(\Re(z))^2 - 2\Re(z) + 6\Im(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 + y^2) + 2x^2 - 2x + 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

2. لدينا :

$$\Leftrightarrow -\frac{X^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \quad / \quad \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases}$$

إذن (H) هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{1}{3}\right)$ ولدنا :

بالنسبة للمعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: لدينا :

✓ رأسي (H) هما : $B\left(\frac{0}{-2\sqrt{2}}\right)$ و $B\left(\frac{0}{2\sqrt{2}}\right)$.

✓ مقاربي (H) هما : $(\Delta): Y = X$ و $(\Delta'): Y = -X$. $(a = b = 2\sqrt{2})$

بالنسبة للمعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: لدينا : إذن $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 3 \end{cases}$

✓ رأسي (H) هما : $B\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)$ و $B\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)$.

✓ مقاربي (H) هما : $(\Delta): y - 3 = x - 1$ و $(\Delta'): y - 3 = -(x - 1)$

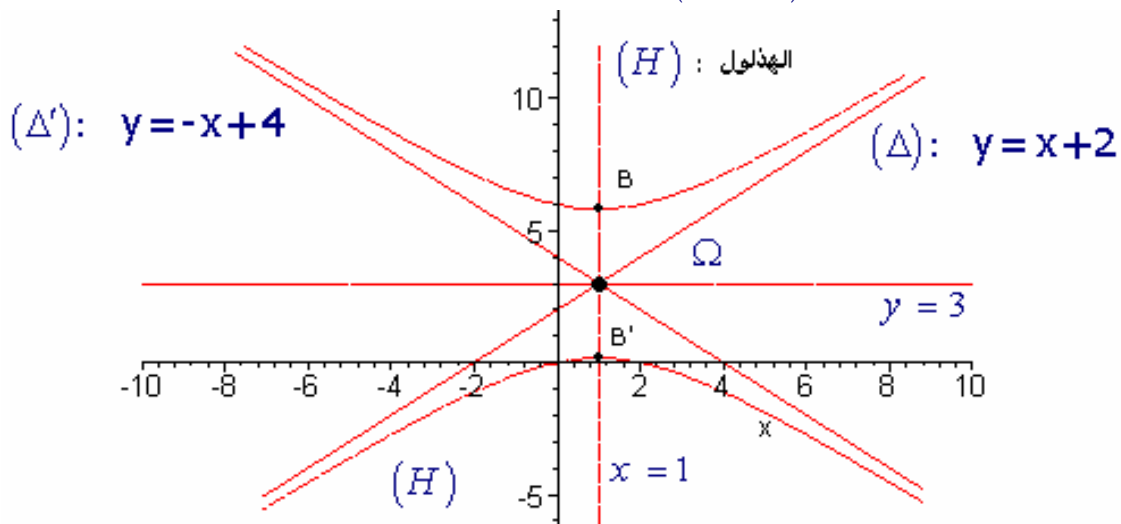
أي : $(\Delta): y = x + 2$ و $(\Delta'): y = -x + 4$

3. الزوج $(0,0)$ يحقق المعادلة : $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$. إذن : $O \in (H)$

معادلة المماس (T_O) للهذلول (H) في النقطة O هي : $xx_0 - yy_0 - (x + x_0) + 3(y + y_0) = 0$

حيث $x_0 = 0$. إذن : $(T_O): -x + 3y = 0$

4. إنشاء الهذلول (H) في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.



II- 1. لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

$$\begin{aligned} P(z) = 4 - 6i &\Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z = 4 - 6i \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2(1 + 3i)z - 4 + 6i = 0 \end{aligned}$$

المميز المختصر لهذه المعادلة هو : $\Delta' = (1 + 3i)^2 - (-4 + 6i) = 1 + 6i - 9 + 4 - 6i = -4 = (2i)^2$.

إذن حلي المعادلة هما : $z_1 = 1 + 3i + 2i = \boxed{1 + 5i}$ و $z_2 = 1 + 3i - 2i = \boxed{1 + i}$.

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{1 + i ; 1 + 5i\}$.

2. لدينا : $u = 1 + 5i$; $v = 1 + i$; $w = 239 - i$. نضع : $\alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

✓ أ- لدينا : $u^4 \times v = (1 + 5i)^4 \times (1 + i) = (476 - 480i) \times (1 + i) = 956 - 4i = 4(239 - i) = 4w$.

✓ ب- لدينا : $u = 1 + 5i = 5\left(\frac{1}{5} + i\right) = 5(\tan \alpha + i) = \frac{5}{\cos \alpha}(\sin \alpha + i \cos \alpha)$.

$$= \frac{5}{\cos \alpha} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right)$$

وبما أن $u = \left[\frac{5}{\cos \alpha}, \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$: إذن $\cos \alpha > 0$: فإن $\alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

ومنه نستنتج أن عمدة للعدد العقدي $u = 1 + 5i$ هي : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \pmod{2\pi}$.

ولدينا : $w = 239 \left(1 - \frac{1}{239}i \right) = 239(1 - i \tan \beta) = \frac{239}{\cos \beta}(\cos \beta - i \sin \beta)$.

وبما أن $w = \left[\frac{239}{\cos \beta}, -\beta \right]$: إذن $\cos \beta > 0$: فإن $\beta = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

ومنه نستنتج أن عمدة للعدد العقدي $w = 239 - i$ هي : $\arg(w) \equiv -\beta \pmod{2\pi}$.

ج- لدينا : $v = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$: إذن $\arg(v) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

و : $\alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ و $\beta = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$u^4 \times v = 4w \Rightarrow \arg(u^4 \times v) \equiv \arg(4w) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 4\arg(u) + \arg(v) \equiv \arg(4) + \arg(w) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv 0 - \beta \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2\pi - 4\alpha + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow -4\alpha + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

إذن : $\exists k \in \mathbb{Z} / 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 4\alpha < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0 \end{cases}$$

وبما أن :

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 4\alpha - \beta < 2\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + 2k < 2$$

$$\Rightarrow -2 < 1 + 8k < 8$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{7}{8}$$

فإن : $k = 0$ لأن $k \in \mathbb{Z}$. إذن : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. أي :

$$4\text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

✍ التمرين الرابع : ✍

الجزء الأول :

في هذا الجزء ، نعتبر : $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$.

ولتكن g_n الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$.

1. لدينا g_n دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'_n(x) = (nx + 2\ln(x))' = n + \frac{2}{x} = \frac{nx + 2}{x} > 0$$

إذن g_n دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx + 2\ln(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} nx + 2\ln(x) = -\infty$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة g_n على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي :

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$		+
$g_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. لنبين أن : $\forall x \in]0, +\infty[: \sqrt{x} > \ln x$.

نضع : $\forall x \in]0, +\infty[: \varphi(x) = \sqrt{x} - \ln x$. لدينا :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \varphi'(x) = (\sqrt{x} - \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x} = \frac{x - 4}{2x(\sqrt{x} + 2)}$$

إذن إشارة $\varphi'(x)$ على المجال $]0, +\infty[$ هي إشارة $x - 4$ ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{2\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(1 - \frac{2\ln t}{t} \right) = +\infty$$

حيث $t = \sqrt{x}$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$

x	0	4	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$

إذن : $2 - \ln 4$ قيمة دنيا مطلقة للدالة φ على المجال $]0, +\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن :

$\forall x \in]0, +\infty[: \varphi(x) \geq \sqrt{2} - \ln 2 > 0$ لأن : $2 < e \Rightarrow \ln 2 < 1 \Rightarrow 2 \ln 2 < 2 \Rightarrow \ln 4 < 2 \Rightarrow 2 - \ln 4 > 0$

ومنه فإن : $\forall x \in]0, +\infty[: \sqrt{x} > \ln x$

3. أ- لدينا g_n دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. إذن g_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال

$$J = g_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right[= \mathbb{R}$$

بما أن $0 \in \mathbb{R}$ ، فإن :

$$\exists ! \alpha_n \in]0, +\infty[/ g_n(\alpha_n) = 0$$

ولدينا : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + 2 \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2 \ln n$ و حسب 2 : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln n > 0$

إذن : $n \geq 3 > e \Rightarrow \ln n > 1 \Rightarrow -2 \ln n < -2 \Rightarrow 1 - 2 \ln n < -1 < 0 \Rightarrow g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

ب- لدينا : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ حسب مبرهنة القيم الوسطية (T.V.I) ، لدينا : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) \times g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0$

ب- لدينا : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\forall n \geq 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ، إذن ، حسب مصاديق التقارب ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

نجد أن :

الجزء الثاني :

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$$

1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} e^{-x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

في الصفر . ولدينا : $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسى موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأضلاع 0 .

2. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-3x})^{\frac{1}{3}} = 0$ نضع : $t = -3x$. إذن : $t \rightarrow -\infty$. ومنه فإن :

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارباً أفقياً بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-3x})^{\frac{1}{3}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3} t e^t\right)^{\frac{1}{3}} = 0$

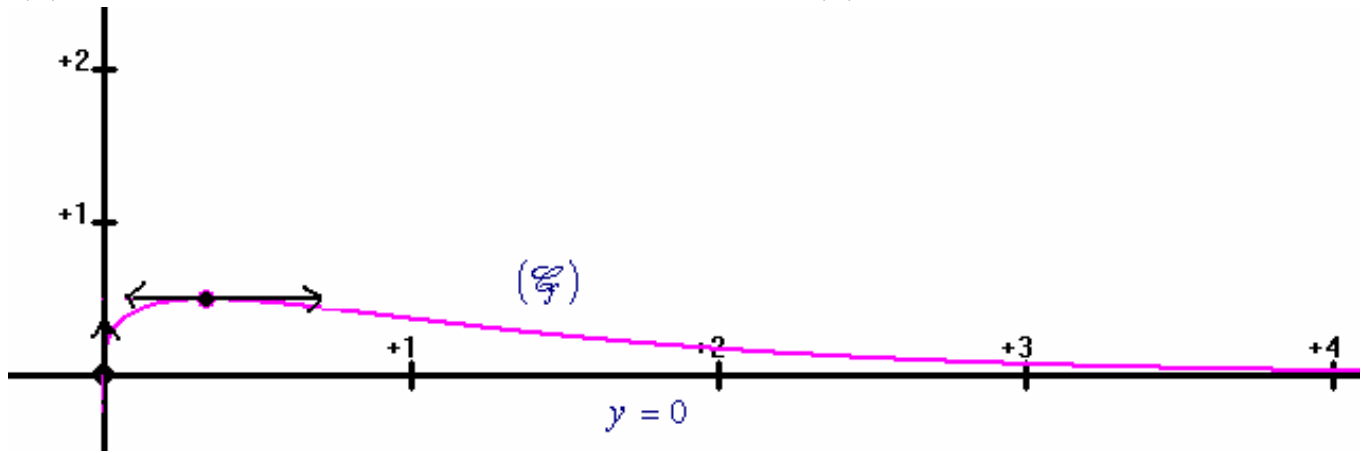
3. أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$. لدينا :

$$(*) : f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} e^{-x}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} e^{-x} + x^{\frac{1}{3}} (-e^{-x}) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x} - x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \left(\frac{1}{3x} - 1\right) x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$$

ب- إشارة $f'(x)$ على المجال $]0, +\infty[$ هي إشارة $1-3x$. ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0
$f(x)$	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}}$	0

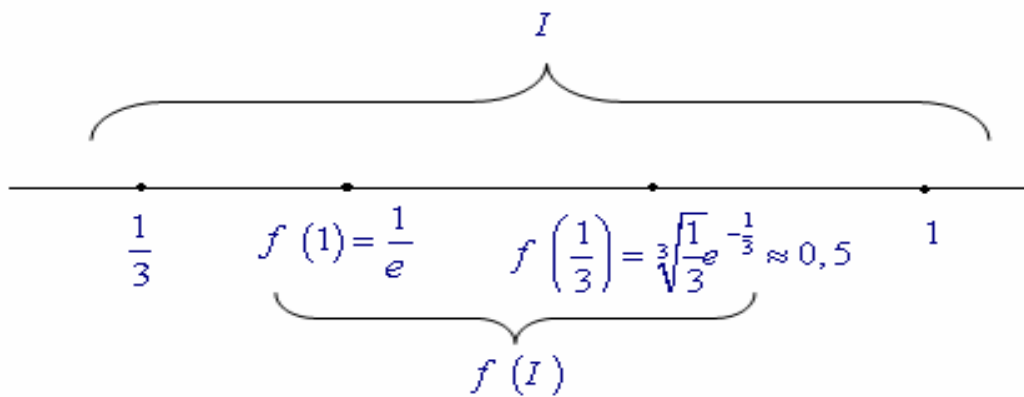
4. إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$: نعطي: $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$. $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,49681506261157293027666287357293594$.



II- نضع : $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

1. أ- لدينا f متصلة و تناقصية قطعاً على المجال I . إذن : $f(I) = \left[f(1), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{1}{e}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}}\right] \subset I$ لأن :

$$f(I) \subset I \quad \text{خلاصة : } e < 3 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e} > \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,5 < 1$$



ب- ليكن $x \in I$. حسب العلاقة (*) ، لدينا :

$$\left|f'(x)\right| = \left|\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)\right| = \frac{1}{3}f(x)\left|\frac{1-3x}{x}\right|$$

$$\frac{1-3x}{x} = -3 + \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad f(x) \leq 1 \quad \text{فإن} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5 \leq 1 \quad \text{و} \quad f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$$

إذن :

$$x \in I \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 3 \Rightarrow -2 \leq -3 + \frac{1}{x} \leq 0 \leq 2 \Rightarrow \left|-3 + \frac{1}{x}\right| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{1-3x}{x}\right| \leq 2$$

ومنه فإن : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. خلاصة : $\forall x \in I : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

ج- لدينا :

$$\begin{aligned} [f(x) = x ; x > 0] &\Leftrightarrow [\sqrt[3]{x}e^{-x} = x \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [e^{-x} = x^{\frac{2}{3}} \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [-x = \ln(x^{\frac{2}{3}}) \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [-x = \frac{2}{3}\ln(x) \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [-3x = 2\ln(x) \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [3x + 2\ln(x) = 0 \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [g_3(x) = 0 \text{ و } x > 0] \\ &\Leftrightarrow [x = \alpha_3] \end{aligned}$$

ولدينا : $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = \frac{1}{3} \in I$. ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن : $u_n \in I$ ، ونبين أن : $u_{n+1} \in I$.

لدينا : $f(I) \subset I$ و $u_n \in I$. إذن : $u_{n+1} = f(u_n) \in I$. وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in I$.

ب- لدينا : f متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال I . حسب مبرهنة التزايد المتتمة ، لدينا : $\exists c \in I / u_{n+1} - \alpha_3 = f(u_n) - f(\alpha_3) = f'(c)(u_n - \alpha_3)$. إذن :

$$|u_{n+1} - \alpha_3| = |f'(c)| |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$$

وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$

ج- من أجل $n = 0$ ، لدينا : $|u_0 - \alpha_3| = \left| \frac{2}{3} - \alpha_3 \right|$. ونعلم أن $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، إذن :

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < -\alpha_3 < -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{3} - \alpha_3 < 0 < \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{1}{3} - \alpha_3 \right| < \frac{\sqrt{3}-1}{3} < \frac{2}{3}$$

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن : $|u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. إذن : $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

ومنه فإن : $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}$. وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

د - لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. حسب مصاديق التقارب ،

متتالية مقاربة نهايتها : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_3$.

III - لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)dt$.

1. أ- لدينا f متصلة على المجال $[0, +\infty[$. لتكن ϕ دالة أصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$. إذن : ϕ قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ، ولدينا : $\phi'(x) = f(x)$: $\forall x \in [0, +\infty[$. ولدينا :

$F(x) = [\phi(t)]_x^{8x} = \phi(8x) - \phi(x)$: $\forall x \in [0, +\infty[$. بما أن ϕ قابلة للاشتقاق على المجال

$[0, +\infty[$ و $x \mapsto 8x$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ و $8x > 0$: $\forall x \in [0, +\infty[$ ، فإن :

$$\forall x \in [0, +\infty[: F'(x) = (\phi(8x) - \phi(x))' = 8f(8x) - f(x) = 8\sqrt[3]{8x}e^{-8x} - \sqrt[3]{x}e^{-x} = (16e^{-7x} - 1)\sqrt[3]{x}e^{-x}$$

ومنه فإن : $\forall x \in [0, +\infty[: F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$

2. أ- ليكن $x > 0$. لدينا :

$$x \leq t \leq 8x \Rightarrow \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{t} \leq 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow 0 \leq \sqrt[3]{x}e^{-t} \leq \sqrt[3]{t}e^{-t} \leq 2\sqrt[3]{x}e^{-t} \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x} \int_x^{8x} e^{-t} dt$$

ولدينا : $\int_x^{8x} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{8x} = -e^{-8x} + e^{-x} = e^{-x}(1 - e^{-7x})$: إذن : $0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x}e^{-x}(1 - e^{-7x})$

وبالتالي فإن : $\forall x \in [0, +\infty[: 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

ب- لدينا : $\forall x \in [0, +\infty[: 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 0$ لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-7x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

ج- ليكن $x \in [0, +\infty[$ لدينا :

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{أو} \quad 16e^{-7x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{أو} \quad e^{-7x} = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{أو} \quad -7x = -\ln 16$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{\ln 16}{7} \approx 0,39608410317711160538127$$

نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \geq 0$

$$x \geq \frac{\ln 16}{7} \Rightarrow 7x \geq \ln 16 \Rightarrow -7x \leq -\ln 16 \Rightarrow e^{-7x} \leq \frac{1}{16} \Rightarrow 16e^{-7x} - 1 \leq 0 \Rightarrow F'(x) \leq 0 \quad \text{و}$$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$.

x	0	$\frac{\ln 16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$	0	+	0
$F(x)$	0	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	0

