نيابة الخميسات	فرض محروس رقم ④	المادة : الرياضيات
ثا . محمد بن الحسن الوزاني	الدورة الأولى ـ مدة الإنجاز : **3H**	الأستاذ : علي الشريف
السنة الدراسية : 2015/2014	بتاريخ : **2015/01/19**	قسم الثانية باكالوريا علوم رياضية

التمرين الأول : 3ن

1) أحسب التكامل : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3sin(x) + 5cos(x)}{cos(x) + 2sin(x)} dx$. (1.5ن)

2) أحسب التكامل : $I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$, ضع : $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ (1.5ن)

التمرين الثاني : 3ن

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$. و ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha \prec \beta$.

نفترض : $(\forall x \in [\alpha;\beta]):\ f(x-\alpha) + f(\beta - x) \neq 0$

1) بين أن : $\int_\alpha^\beta \frac{f(\beta - x)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)} dx = \int_\alpha^\beta \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)} dx = \frac{\beta - \alpha}{2}$ (2ن)

2) آستنتج قيمة التكامل : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ (1ن)

التمرين الثالث : 4ن

نعتبر المتتالية $u_0 = 1$ المعرفة بما يلي : $\underbrace{u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2u_n} \quad et \quad u_0 = 1}$

1) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n \geq 1$. (1ن)

2) لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

أ – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}): |v_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{4}|v_n - w_n|$. (1.5ن)

ب ـ بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متحاديتين . (1.5ن)

مسألة : 10ن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

$$\underbrace{f(x)=\frac{ln(1+2x)}{x}\ ;\ x\neq 0 \quad et \quad f(0)=2}$$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر . (0.5ن)

2) لكل عدد حقيقي α غير منعدم من المجال I , نعتبر الدالة العددية φ_α للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي : $\varphi_\alpha(x)=\left(ln(1+2\alpha)-2\alpha\right)x^2-\left(ln(1+2x)-2x\right)\alpha^2$

أ – احسب $\varphi_\alpha(\alpha)$ و $\varphi_\alpha(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي β محصور بين 0 و α بحيث :

$$\frac{ln(1+2\alpha)-2\alpha}{\alpha^2}=\frac{-2}{1+2\beta}$$ (0.5ن)

ب – استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر 0 و أن : $f'(0)=-2$. (0.75ن)

3) أ – بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجموعة $I-\{0\}$ و أن :

$(\forall x\in I-\{0\})\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث : $g(x)=2x-(1+2x)ln(1+2x)$ (0.5ن)

ب – بين أن : $(\forall x\in I-\{0\})\ ;\ g(x)\prec 0$ (0.5ن)

ج – استنتج تغيرات الدالة f على المجال I . (0.25ن)

4) أ – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما . (0.5ن)

ب – بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $[1;2]$ بحيث : $f(x_0)=1$. (0.5ن)

ج – أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ : $x_0\approx 1,3$) (0.5ن)

Gsm : 0664865556

الجزء الثاني :

1) نضع : $J=\left[1;x_0\right]$ و $h(x)=ln(1+2x)\ :\ (\forall x\in I)$.

أ – بين أن الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال I و أن : $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0\prec h'(x)\leq \frac{2}{3}$ (0.5ن)

ب – تحقق من أن : $h\ (x_0)=x_0$ و أن : $h(J)\subset J$. (0.75ن)

2) نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\underbrace{(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}=ln(1+2u_n)\ \ ;\ \ u_0=1}$

أ – بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\in J$. (0.5ن)

ب – بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\left|u_n-x_0\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0.5ن)

ج – آستنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . (0.5ن)

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ ـ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$. (0.5ن)

ب ـ آستنتج منحى تغيرات F على المجال I . (0.25ن)

2) أ – بين أن : $(\forall x\geq 1):F(x)\geq\int_1^x\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$. (0.5ن)

ب ـ آستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. (0.5ن)

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$.

و نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

$$\underbrace{F(x)=F(x)\ ;\ x\in I \quad et \quad F(-\frac{1}{2})=\ell}$$

أ – بآستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x\in I)\ ;\ F(x)-\ell \geq f(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. (0.5ن)

ب ـ آستنتج أن الدالة F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$. (0.5ن)