Institution al inbiaat privée	**résume de cours sur la logique**	**1sm option biof**

I)Propositions et connecteurs logiques

1. Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et seule valeur : vrai ou faux.
2. La négation de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. Elle est noté non P
3. La conjonction
   Si P et Q sont deux propositions, P et Q est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
4. La disjonction
   Si P et Q sont deux propositions, P ou Q est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie. .
5. L'implication
   L'implication $P\Longrightarrow Q$ est la proposition non P ou Q. Pour démontrer $P\Longrightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie.
6. L'equivalence

On dit que les propositions P et Q sont équivalentes lorsque l'on a à la fois $P\Longrightarrow Q$ et $Q\Longrightarrow P$ qui sont vraies. On note alors $P\Longleftrightarrow Q$ *(p et q ont même valeur de vérité).*

II)Quantificateurs

1. Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté $\forall x$

. La proposition $\forall x\in E$, $P(x)$ est vraie lorsque, pour tout $x\in E$, la proposition $P(x)$

est vraie.

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté $\exists$. La proposition $\exists x\in E$, $P(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x\in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Le quantificateur il existe un unique est noté $\exists!$. La proposition $\exists! x\in E$, $P(x)$ est vraie lorsqu'il existe un unique $x\in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.

2. La négation une proposition quantifiée

La négation de $\forall x\in E$, $P(x)$ est $\exists x\in E$, non $P(x)$

La négation de $\exists x\in E$, $P(x)$ est $\forall x\in E$, non $P(x)$

III) Les lois logiques

Une loi logique est une proposition qui est toujours vraie quelque soient les propositions qui la constituent.

Exemples

1.Loi de Morgan

non (P et Q) $\Leftrightarrow$ (non P) ou (non Q).

non (P ou Q) $\Leftrightarrow$ (non P) et (non Q).

2. $\left|\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{array}\right.$ sont aussi des lois logiques

$\wedge$ signifie « et » $\vee$ signifie « ou »

IV) Méthodes de raisonnement

1.par contraposée : pour démontrer que $P \Longrightarrow Q$

il suffit de démontrer la contraposée de cette proposition, c'est-à-dire non $Q \Longrightarrow$non P

2.Par l'absurde : pour démontrer que $P \Longrightarrow Q$, on peut supposer que P et non Q

Sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction.

Ou si on veut démontrer qu'une propsition est vraie on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction

3.Par récurrence : si on veut prouver qu'une proposition $P(n)$ dépendant de l'entier naturel n est vraie pour tout entier n, on peut procéder de la façon suivante :

Initialisation : prouver que $P(0)$ est vraie.

hérédité : prouver que, pour tout entier n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

4.Raisonnement par disjonction des cas

Voir les exercices

A retenir

Les connecteurs logiques « et » et « ou »

$\wedge$ et $\vee$ sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre.
Lois de DE MORGAN : $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

L'implication et l'équivalence

Si P et Q sont deux propositions, l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\overline{P} \vee Q$.
L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \wedge \overline{Q}$
La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Elle est équivalente à $P \Rightarrow Q$.
La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Elle n'a aucun rapport avec $P \Rightarrow Q$.

$P \Leftrightarrow Q$ est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
Une équivalence signifie donc deux implications, une de gauche à droite et une de droite à gauche.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E/\ \overline{P(x)})$ et $\overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E/\ \overline{P(x)})$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature,
mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de nature différente.

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »,
mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».