2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 04	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الثانية : 2010/2009	نيابة الخميسات

Durée:04 heure

- **التمرين رقم 01:**

1)- حل المعادلة التفاضلية : $(\mathrm{E}): y' = 2y+8$.

2)- نبحث عن جميع الدوال العددية f القابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ بحيث :

$$(\mathrm{F}):\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right); x.\mathrm{f}'(x)=(2x+1)\mathrm{f}(x)+8x^2 .$$

⇐ لكل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، نضع : $\mathrm{g}(x)=\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$.

أ- بين أن f تكون حلا للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كانت g حلا للمعادلة (E) .

ب- إستنتج مجموعة حلول المعادلة (F) ، ثم حدد الحل h للمعادلة (F) بحيث : $\mathrm{h}(1)=0$.

- **التمرين رقم 02:**

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{E},+,\cdot)$ لمجموعة الدوال العددية المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

نعتبر F مجموعة حلول المعادلة التفاضلية : $(\mathrm{E}_a): y''-2y'+(1+a^2)y=0$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

1)- بين أن : $\mathrm{F}=\left\{\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$ ، حيث φ_1 و φ_1 دالتين ينبغي تحديدهما .

2)- بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(\mathrm{E},+,\cdot)$ و أن $\mathrm{B}(\varphi_1,\varphi_2)$ أساس له .

3)- لتكن f دالة عددية تنتمي إلى F .

أ- بين أن $\mathrm{f}'\in\mathrm{F}$ ، ثم حدد إحداثيتي f' في الأساس $\mathrm{B}(\varphi_1,\varphi_2)$.

ب- بين أن f تقبل دالة أصلية h تنتمي إلى F ، ثم حدد إحداثيتي h في الأساس $\mathrm{B}(\varphi_1,\varphi_2)$.

ج- بين أن ل φ_1 و φ_2 دالتين أصليتين ϕ_1 و ϕ_2 (على التوالي) تنتميان إلى F ينبغي تحديدهما .

4)- لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $\mathrm{u}_n=\int_0^{\pi}e^x\cos(nx)\,dx$ و $\mathrm{v}_n=\int_0^{\pi}e^x\sin(nx)\,dx$.

⇐ عبر عن الحدين u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب نهايتي كل من $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **التمرين رقم 03:**

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1)- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E}_\theta): z^2-2ie^{i\theta}z-4(1-i)e^{2i\theta}=0$.

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لحقاهما على التوالي: $z_A=2e^{i\theta}$ و $z_B=-2(1-i)e^{i\theta}$.

أ- أكتب z_B على الشكل الأسي .

ب- أحسب اللحق z_C للنقطة C بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع .

3)- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{F}_\theta):\left(\sqrt{2}z-1\right)^3=(-2+2i)e^{i\theta}z^3$.

أ- حدد الجذور المكعبة للعدد العقدي : $(-2+2i)e^{i\theta}$.

ب- إستنتج حلول المعادلة (F_θ) على الشكل الجبري .

- **التمرين رقم 04:**

x و y رقمين متتابعين و غير منعدمين في نظمة عد ذات الأساس b بحيث : $\overline{xxxx}_{(b)}=\left(\overline{yy}_{(b)}\right)^2$.

1)- بين أن : $(\mathrm{E}): x\left(b^2+1\right)=y^2(b+1)$.

2)- أ- بين أن : $\left(b^2+1\right)\wedge(b+1)=(b+1)\wedge 2$.

ب- باستعمال مبرهنة كوص ، أثبت أن b عدد فردي .

3)- نضع : $b=2k+1$ ، حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

أ- بين أن : $(\mathrm{F}): x\left(2k^2+2k+1\right)=y^2(k+1)$.

ب- حدد قيمة k ، ثم إستنتج كلا من الأساس b و الرقمين x و y .

- **التمرين رقم 05:**

- **الجزء الأول:**

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathrm{I}=\left]-1;+\infty\right[$ بما يلي :

$$\mathrm{f}(x)=\frac{e^x}{1+x} \text{ و } \mathrm{g}(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2} .$$

و ليكن (C_f) و (C_g) منحنيي f و g في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)- أدرس تغيرات كل من f و g ، ثم تحقق أن : $(\forall x\in\mathrm{I});\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}'(x)$.

2- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ، ثم أرسمهما في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثاني:

نضع : $\mathrm{J}=\int_0^1 \mathrm{f}(t)\,dt$ ، و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$u_0=\int_0^1 e^t dt \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=(-1)^n\int_0^1 t^n e^t dt .$$

1- بين أن : $1\leq \mathrm{J}\leq \frac{e}{2}$ ، ثم أحسب الحدين u_0 و u_1 .

2- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=(-1)^{n+1}e+(n+1)u_n$.

3- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ و $R_n=(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{f}(t)\,dt$.

أ- بين أن : $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+...+(-1)^n t^n+\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$ لكل t من $[0;1]$

ثم إستنتج أن : $\mathrm{J}=S_n+R_n$.

ب- بين أن : $|R_n|\leq \frac{e}{2(n+2)}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

الجزء الثالث:

لتكن F الدالة المعرفة بما يلي : $\mathrm{F}(x)=\int_0^{\ln x}[\mathrm{f}(t)]^2 dt$.

1- بين أن F معرفة على المجال $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

2- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ ، ثم أحسب $\mathrm{F}'(x)$.

3- بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e};1\right]\right);\mathrm{F}(x)\leq x^2\left(1-\frac{1}{1+\ln x}\right)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\mathrm{F}(x)$.

4- بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[\right);\mathrm{F}(x)=\frac{x^2}{2(1+\ln x)^2}-\frac{1}{2}+\int_0^{\ln x}\frac{e^{2t}}{(1+t)^3}dt$.

5- إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة F .

إنـــتـهـى الـموضـوع .