المستوى	الثانية باكالوريا علوم تجريبية - علوم رياضية	الدرس 2	الاشتقاق ودراسة الدوال العددية
المادة	الريـــــاضــــــيـــــــات	الموضوع	سلسلة تمارين رقم 3

التمرين 1:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ وأول النتيجة هندسيا .

3- ادرس قابلية اشتقاق f في -2 على اليسار و في 0 على اليمين .

4- أ) بين أنه لكل x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]-\infty,-2]$

5- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب) أنشيء (C) .

6- ليكن g قصور الدالة f على $[0,+\infty[$

أ) بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب) لكل x من J حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x .

التمرين 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D=]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أ) تحقق من أن : $\dfrac{f(x)}{x+1}=\dfrac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}}$ $\quad(\forall x\in D-\{-1\})$

ب) ادرس قابلية إشتقاق f على اليسار في -1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

3- أ) بين أن : $f'(x)=\dfrac{-3}{2x^3\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}}$ $\quad(\forall x\in D-\{-1\})$

abdellahsabri@gmail.com maths-physique-chimie 06.70.15.04.81

التمرين 3:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{x^2+27}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

a-1- حدد D حيز تعريف الدالة f . b-احسب كلا من النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

a-2 – تحقق من أن : $\forall x\in D: f(x)-(\frac{x+1}{2x})=\frac{x+1}{2x}(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x})$

b- استنتج أن المستقيم $(\Delta_1): y=\frac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

C – بين أن $(\Delta_2): y=-\frac{}{2x+1}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $-\infty$

a-3- بين أن $f'(x)=\frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$ لكل x من D .

b- تحقق من أن f تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$. c- اعط جدول تغيرات الدالة f .

a-4 – حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل.

b- نقبل أن $A(x_0,y_0)$ حيث $x_0\approx-5,2$ و $y_0\approx2,9$ هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) وأن f'(x) سالبة على المجال $[x_0,0[$ وموجبة على كل من المجالين $]-\infty,x_0]$ و $]0,+\infty[$. نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ أنشئ C .

التمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}.\sqrt{1+x^2}$

وليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f، وتحقق من أن f فردية.

2- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما .

3- بين أنه لكل x من D لدينا : $f'(x)=\frac{3}{x^4.\sqrt{1+x^2}}$. واستنتج تغيرات f . 4- أنشئ (ζ).

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على J . (g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g)

ج- أنشئ (ζ') المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

التمرين 5:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x-2+\sqrt[3]{x^2+1}$

وليكن (ζ) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (ζ)

2-أ- بين أن : $f'(x)=\frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$, $(\forall x\in[0,+\infty[)$ ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده

4-أ- بين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec1$ (دون حساب α).

ب- حدد نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x .

ج- أنشئ (ζ) ثم (ζ') منحنى الدالة f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

abdellahsabri@gmail.com maths-physique-chimie 06.70.15.04.81

التمرين 6:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=6x^{\frac{2}{3}}-4x$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة .

2- حدد الفرع اللانهائي ل (ζ) منحنى f .

3- احسب f'(x) لكل x من $]0,+\infty[$ ثم حدد جدول تغيرات f .

4-أ- حدد نقطتي تقاطع (ζ) مع محور الأفاصيل.

ب- حدد معادلة (Δ) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{27}{8}$

ج- أنشئ (Δ) و (ζ) في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

(وحدة القياس : 1 cm).

5- g قصور f على المجال $I=[1,+\infty[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال يتم تحديده . احسب $(g^{-1})'(0)$.

التمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي:

$$f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^2$$

(ζ) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2-أ- بين أن لكل x من IR : $f'(x)=\frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

ب- أثبت أن $f'(x)\neq 0$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج الفرع اللانهائي ل (ζ) جوار $-\infty$

4-أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (ζ) في النقطة ذات الأفصول 0.

ب- أنشئ المستقيم (T) والمنحنى (ζ) (الوحدة 2cm)

5-أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $(f^{-1})'(1)$

ج- احسب f'(x) لكل x من J .

التمرين 8:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^* بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+\frac{2}{x} & (x\in]-\infty,0[\cup]0,1[) \\ f(x)=\frac{1+x}{2\sqrt{x}} & (x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$

2-أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$ على اليسار .

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$ على اليمين (لاحظ أن $(1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2$

3- أ- بين أن $f'(x)\prec 0$ $(\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,1[)$

ب- بين أن $f'(x)=\frac{x-1}{4\sqrt{x}}$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f.

4- ليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ζ).

ب- أنشئ المنحنى (ζ) (نقبل أن للمنحنى (ζ) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها 3)

abdellahsabri@gmail.com maths-physique-chimie 06.70.15.04.81

التمرين 9:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x}; & x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+3} & ;x\ge 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3- أ- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

ب بين أن $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ لكل x من $]-\infty,1[$ ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4-أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- ارسم المنحنى (C) (لاحظ أن f(-3)=0

5- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال I .

ج- بين أن g^{-1} هي دالة أصلية للدالة $x\to\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على المجال I .

التمرين 10:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$ ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

2- أ- بين أن : $f'(x)=\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x})}\right)(\sqrt{x}-1)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3-أ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة y=x .

ب- ارسم المنحنى (C) $(f(4)=\dfrac{5}{2}$ و $f(\dfrac{1}{4})=\dfrac{7}{4}$)

4- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالةعكسية g^{-1} وحدد مجموعة الدالة g^{-1}

ب- ارسم في نفس المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

5- نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=f(a_n) \end{cases}$

أ- بين ان : $a_n\succ 1$ $(\forall n\in IN)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ تناقصية.

ج- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

abdellahsabri@gmail.com maths-physique-chimie 06.70.15.04.81

التمرين 11:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x-1} & ;x\geq 1 \\ f(x)=x+2\sqrt{x-x} & ;x\prec 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-أ- ادرس اتصال f في 1.

ب- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3-أ- احسب f'(x) لكل x من $IR-\{1\}$ ب- اعط جدول تغيرات f .

4-أ- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C) .

ب- حدد تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل.

ج- ارسم المنحنى (C)

5- لتكن g الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[2,+\infty[$ والتي تحقق $g(2)=\frac{2}{3}$

أ- اكتب g(x) بدلالة x

ب- اعط جدول تغيرات الدالة g .

التمرين 12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} & ;\ x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1} & ;\ x\geq 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

3) أ - بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

ب - بين أن $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}$ لكل x من $]-\infty,1[$.

ج - اعط جدول تغيرات الدالة f.

4) أ - ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

ب - ارسم المنحنى (C) (لاحظ أن : $f(-3)=0$).

5) لتكن g قصور الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

أ - بين أن g تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال I.

ج - بين أن g^{-1} هي دالة أصلية للدالة $x\longrightarrow\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على المجال $]0,1[$.

abdellahsabri@gmail.com maths-physique-chimie 06.70.15.04.81

التمرين 13

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

1) احسب نهايات f عند محدات $\mathbb{R}$.

2) a - بين أن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $(3-x)$.

b - اعط جدول تغيرات الدالة f.

3) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a - ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم ذي المعادلة : $y = 2$

b - ارسم المنحنى (C) (تحديد نقطتي الانعطاف غير مطلوب. نأخذ $\sqrt{2} \approx 1,4$).

4) نضع : $I = [3, +\infty[$

ونعتبر الدالة العددية g المعرفة من I نحو f(I) كما يلي : $\forall x \in I \;;\; g(x) = f(x)$

a - بين أن g تقابل

b - ارسم منحنى الدالة g^{-1} في المستوى المنسوب إلى المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

التمرين 14

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^3} . \sqrt{1+x^2}$

وليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f، وتحقق أن f فردية.

2) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

3) بين أنه لكل x من D لدينا : $f'(x) = \dfrac{3}{x^4 . \sqrt{1+x^2}}$ واستنتج تغيرات f.

4) أنشئ $(\mathcal{C})$.

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]0, +\infty[$.

أ - بين أن g تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب - بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على J. (g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g).

ج - أنشئ $(\mathcal{C}')$ المنحنى الممثل للدالة g^{-1}.