

فرض محروس 1

التمرين الأول

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} : x \geq 1 \quad \text{ب-1} \quad f \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R}^+ \text{ ب}$$

$$f(x) = \text{Arc tan} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) : 0 \leq x < 1$$

أ- أحسب $\lim_{+\infty} f(x)$

ن 1

ب- أدرس اتصال الدالة f في 1

ن 1

ج- لتكن g قصور الدالة f على $[1; +\infty[$

$$\text{أ- حدد دالة } u \text{ بحيث } g(x) = \frac{\pi}{2} + u(\sqrt[3]{x-1}) \text{ لكل } x \geq 1$$

ن 1

ب- بين أن g تزايدية على $[1; +\infty[$

ن 1,5

ج- استنتج أن g تقابل من $[1; +\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x \in J$

ن 2,5

التمرين الثاني

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، تعتبر الدالة العددية f_n المعرفة ب: $f_n(x) = x^3 + nx - n$

$$\text{أ-1} \quad \text{بين أن : } f_n(\alpha_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* , \exists ! \alpha_n \in]0; 1[$$

ن 1

أ-2 قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل $x \in]0; 1[$ ثم استنتج أن $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية

ن 1,5

$$\text{أ-3} \quad \text{بين أن } \alpha_n \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ن 1

أ-4 بين أن $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

ن 1

$$\text{أ-5} \quad \text{تعتبر الدالة } h_n \text{ المعرفة ب : } h_n(x) = \frac{\text{Arc tan}(\sqrt[3]{x^3 + nx - n} - x)}{\sqrt{x+3} - 2x}$$

أ- أثبت أن مجموعة تعريف الدالة h_n هي $[1; +\infty[\cup]\alpha_n; 1[$

ن 1,5

ب- بين أن h_n تقبل تمديدا بالإتصال في 1

ن 1,5

التمرين الثالث

$$\text{تعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة ب : } u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ و } u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}} \text{ لكل } n \in \mathbb{N}$$

ن 1

أ-1 بين أن $0 < u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{أ-2} \quad \text{نضع } v_n = 8u_n^3 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ن 1

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

$$\text{ب- استنتج أن } \forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{-1}{7}\right)^n} + 1$$

ن 1

$$\text{أ-3} \quad \text{نضع } S_n = \sum_{k=0}^n a^k v_k \text{ حيث } a \in \mathbb{R} \text{ و } n \in \mathbb{N}$$

ن 2

بين أن (S_n) متقاربة يكافئ $|a| < 7$

"إننا ندفع ثمنا غالياً من جراء خوفنا من الفشل.. إنه عائق كبير للتطور يعمل على تضيق أفق الشخصية ويحد من الاستكشاف والتجريب، فلا توجد معرفة تخلو من صعوبة وتجربة من الخطأ والصواب.. وإذا أردت الاستمرار في المعرفة عليك أن تكون مستعداً طيلة حياتك لمواجهة خطورة الفشل" جون جاردنير