مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــادة:	**الرياضيات**	**المعامل:**	**9**
الشعـــب(ة):	**شعبة العلوم الرياضية ا و ب**	**مدة الإنجاز:**	**4س**

التمرين الأول :

1. ا. التبادلية: ليكن $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ إذن:

$$\begin{aligned} x*y &= x+y-2 \\ &= y+x-2 \\ &= y*x \end{aligned}$$

ومنه القانون $*$ تبادلي .

التجميعية: ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ إذن:

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= (x+y-2)*z \\ &= (y+x-2)+z-2 \\ &= x+(y+z-2)-2 \\ &= x*(y+z-2) \\ &= x*(y*z) \end{aligned}$$

إذن القانون $*$ تجميعي .

ب. ليكن e عنصرا من $\mathbb{Z}$ إذن :

$$\begin{aligned} e\,est\,neutre\,pour*dans\,\mathbb{Z} &\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{Z})\quad x*e=e*x=x \\ &\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{Z})\quad x*e=x \quad (*est\,commutative) \\ &\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{Z})\quad x+e-2=x \\ &\Leftrightarrow e=2 \end{aligned}$$

اذن القانون $*$يقبل العنصر المحايد 2 في $\mathbb{Z}$

ج. ليكن $x\in\mathbb{Z}$ اذن :

$$\begin{aligned} x\,admet\,un\,symétrique\;dans(\mathbb{Z},*) &\Leftrightarrow (\exists x'\in\mathbb{Z})\quad : x*x'=x'*x=e \\ &\Leftrightarrow (\exists x'\in\mathbb{Z})\quad x*x'=e \quad (*est\,commutative) \\ &\Leftrightarrow (\exists x'\in\mathbb{Z})\quad x+x'-2=2 \\ &\Leftrightarrow (\exists x'\in\mathbb{Z})\quad x'=4-x \end{aligned}$$

وبما أن $x\in\mathbb{Z}$ فان $4-x\in\mathbb{Z}$

إذن كل عنصر x من $\mathbb{Z}$يقبل المماثل$4-x$ في $\mathbb{Z}$ بالنسبة للقانون $*$

وبما أن القانون الداخلي $*$ تجميعي وتبادلي في $\mathbb{Z}$ (حسب ا) ويقبل العنصر المحايد 2 في$\mathbb{Z}$ (حسب ا) فان$(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

2. ا. حسب المعطيات f تطبيق من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ ولكل x و yمن $\mathbb{Z}$ ، $f(x\times y)=x\times y+2$

و
$$\begin{aligned} f(x)\mathrm{T}f(y) &= (x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6 \\ &= x\times y+2(y+2)+2x-2(x+2)-2(y+2)+6 \\ &= x\times y-4+6 \\ &= x\times y+2 \end{aligned}$$

إذن: $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)\ f(x\times y)=f(x)\mathrm{T}f(y)$ ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

ولكل عنصر y من $\mathbb{Z}$ يوجد العنصر الوحيد $x=y-2$ من $\mathbb{Z}$ **حيث** $f(x)=(y-2)+2=y$

وهذا يعني أن f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$. وبالتالي f تشاكل تقابلي $(\mathbb{Z},\times)$ من نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

ب. ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ إذن:

$$\begin{aligned} (x*y)\mathrm{T}z &= (x+y-2)\mathrm{T}z \\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6 \\ &= xz+yz-2z-2x-2y+4-2z+6 \\ &= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+4) \\ &= (x\mathrm{T}z)+(yz-2y-2z+6)-2 \\ &= (x\mathrm{T}z)+(y\mathrm{T}z)-2 \\ &= (x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z) \end{aligned}$$

وبالتالي: $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3);\quad (x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

3. حسب (2. ا) f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ ، وبما أن $\times$ تجميعي وتبادلي ويقبل العنصر المحايد 1 في $\mathbb{Z}$ ، فان T تجميعي وتبادلي ويقبل العنصر المحايد $f(1)=1+2=3$ في $\mathbb{Z}$؛ **وحسب** (2.ب) وكون T تبادلي في $\mathbb{Z}$ **فان** T **توزيعي على * في** $\mathbb{Z}$؛ **وبما أن** $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية حسب (1. ج) فان $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية وواحدية .

4. ا. ليكن $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ إذن:

$$\begin{aligned} x\mathrm{T}y=2 &\Leftrightarrow xy-2x-2y+6=2 \\ &\Leftrightarrow xy-2x-2y+4=0 \\ &\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)=0\ ou\ (y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow x=2\ ou\ y=2 \end{aligned}$$

ب. بما أن 2 هو العنصر المحايد للقانون * (الأول) في الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ فان نتيجة السؤال 4 .ا. تعني أن هذه الحلقة لا تقبل قواسم للعنصر المحايد لهذه الحلقة (قواسم للصفر) وهذا يعني أن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة كاملة.

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

ج . الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ ليست جسما لان العنصر 4 (المخالف ل 2 العنصر المحايد لهذه الحلقة) من $\mathbb{Z}$ لا يقبل مماثلا بالقانون T في $\mathbb{Z}$ لان المعادلة $4\mathrm{T}x=3$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}$ ، لان:

$$\begin{aligned}4\mathrm{T}x=3 &\Leftrightarrow 4x-8-2x+6=3\\ &\Leftrightarrow 2x=5\\ &\Leftrightarrow 2x=5\\ &\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

التمرين الثاني:

الجزء الأول:

1. مميز المعادلة (E) هو :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-\left(3+i\sqrt{3}\right)a\right)^2-4\times 2\times\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left(6+6i\sqrt{3}-8-8i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)a^2\\ &=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2\end{aligned}$$

2. بما أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2=\left(\left(-1+i\sqrt{3}\right)a\right)^2$ و $a\neq 0$ حسب المعطيات، فان $\Delta\neq 0$

ومنه المعادلة (E) تقبل الحلين العقديين:

$$\begin{aligned}z_2&=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}\\ &=\frac{\left(2+2i\sqrt{3}\right)a}{4}\\ &=a\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}\\ &=a\end{aligned}$$

الجزء الثاني:

1. بما أن $a\neq 0$ فان الأعداد العقدية a و $ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و 0 مختلفة مثنى مثنى ، ومنه صورها على التوالي A و B و O مختلفة مثنى مثنى. و

بما أن : $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ فان
$\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$
ومنه
$\begin{cases}|z_B-z_O|=|z_A-z_O|\\ \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$
إذن
$\begin{cases}OB=OA\\ \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعــــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

وهذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين في O وقياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{3}rad$ ، إذن فهو مثلث متساوي الأضلاع .

.2 ا.

$$A_1 = r^{-1}(A) \Leftrightarrow r(A_1) = A$$

$$\Leftrightarrow a - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(a_1 - z)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a - z) + z$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)z$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

و

$$B_1 = r(B) \Leftrightarrow b_1 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - z)$$

$$\Leftrightarrow b_1 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - z)$$

$$\Leftrightarrow b_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} a e^{i\frac{\pi}{3}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)z$$

$$\Leftrightarrow b_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$\Leftrightarrow b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

ب. في هذا السؤال وجب أن يفترض أن: $M \neq A$ و $M \neq B$ و $M \neq O$ ، لأنه إذا كان $M = A$ أو $M = B$ أو $M = O$ فان $M = A_1$ أو $M = B_1$ أو $M = O$ أي أن الرباعي المذكور في السؤال غير معرف. لذا سنفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ و $M \neq O$.

حسب 2 . ا. :

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعـــــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

$$\frac{a_1}{z-b_1}=\frac{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}{z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$$

$$=1$$

وهذا يعني أن: $a_1=z-b_1$ **الشيء الذي يكافئ** $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{B_1M}$ **وهذا يعني أن الرباعي** OA_1MB_1 **متوازي أضلاع .**

3. ا. حسب جواب السؤال 2 . ا. :

$$\frac{z-b_1}{z-a_1}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b)}{e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-a)}$$

$$=\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-b)}{z-a}$$

وبما أن $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ **فان** $e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}}=-e^{-i\frac{\pi}{3}}=-\frac{a}{b}$ **إذن** $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

ب. حسب II. 1 . النقط O **و** A **و** B **غير مستقيمية، إذن النقط** O **و** A **و** B **و** M **غير مستقيمية. إذن:**

$$M, A_1\ et\ B_1\ sont\ alignés \Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z-b}{z-a}\times\frac{0-a}{0-b}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a}\times\frac{0-a}{0-b}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow M, O, A\ et\ B\ sont\ cocycliques$$

<u>التمرين الثالث:</u>

1. ا.بما أن: $3^n-2^n=0[n]$ **فان:** $n|3^n-2^n$ **؛ وبما أن** p **قاسم للعدد** n **فان** $p|3^n-2^n$ **أي** $3^n-2^n=0[p]$

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعـــــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

استنتاج حول p :

بما أن $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ **فان** $3^n-2^n\equiv 1[2]$ **، إذن** $p\geq 3$ **؛ وبما أن** $3^n-2^n\equiv -1\times 2^n\ [3] \equiv 2^{n+1}\ [3]$ **و** $3\wedge 2^{n+1}=1$ **فان** $p\geq 5$

ب. بما أن p **عدد أولي و** $p\geq 5$ **فان العدديين الأوليين** 2 **و** 3 **مخالفين للعدد** p **؛ إذن** $p\wedge 2=1$ **و** $p\wedge 3=1$ **، إذن حسب مبرهنة فرما** $3^{p-1}\equiv 1[p]$ **و** $2^{p-1}\equiv 1[p]$ **.**

ج. لنبين أن : $n\wedge(p-1)=1$ **، بالخلف: نفترض أن** n **و** $p-1$ **ليسا أوليين فيما بينهما، إذن وبما أن** $p\geq 5$ **و** $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ **و** $p|n$ **فان** $p-1\geq 4$ **و** $n\geq 5$ **، إذن** n **و** $p-1$ **يقبلان قاسما أوليا مشتركا موجبا** q **، ومنه** q **قاسم أولي موجب للعدد** n **و** $q\prec p$ **وهذا يتناقض مع كون** p **اصغر قاسم أولي موجب للعدد** n**. إذن ما افترضناه غير صحيح ؛ ومنه** $n\wedge(p-1)=1$ **، إذن حسب مبرهنة بوزو يوجد زوج** (u,v) **من** $\mathbb{Z}^2$ **حيث** $un+v(p-1)=1$ **؛ إذن: إذا وضعنا** $a=u$ **و** $b=-v$ **فان الزوج** (a,b) **يحقق الخاصية المطلوبة .**

د. بما أن $a=q(p-1)+r$ **فان** $rn=an-qn(p-1)$ **، وبما أن** $an-b(p-1)=1$ **حسب السؤال السابق فان** $an=b(p-1)+1$ **؛ إذن** $rn=b(p-1)+1-qn(p-1)$ **، ومنه** $rn=1+(b-qn)(p-1)$ **. وبما أن** $(b,q)\in\mathbb{Z}^2$ **فان** $b-qn\in\mathbb{Z}$ **.**

لنبين أن $b-qn\in\mathbb{N}$ **؛ بالخلف: نفترض أن** $b-qn\leq -1$ **، إذن** $1+(b-qn)(p-1)\leq 1-(p-1)$ **لان** $p-1\geq 0$ **ومنه** $rn\leq 2-p$ **وبما أن** $(n,r)\in\mathbb{N}^2$ **فان** $0\leq 2-p$ **ومنه** $p\leq 2$ **، وهذا يتناقض مع كون** $p\geq 5$ **؛إذن** $b-qn\in\mathbb{N}$ **. ومنه إذا وضعنا** $b-qn=k$ **فان** $k\in\mathbb{N}$ **و** $rn=1+k(p-1)$

2. بالخلف: نفترض انه يوجد عدد صحيح طبيعي n **اكبر قطعا من** 1 **يحقق** (R) **؛ إذن** n **يقبل قواسم أولية موجبة، ليكن** p **اصغر القواسم الأولية الموجبة للعدد** n **؛ إذن حسب ما سبق يوجد زوج** (r,k) **من** $\mathbb{N}^2$ **حيث** $rn=1+k(p-1)$

وبما أن $3^n-2^n=0[p]$ **(حسب 1. ا) فان** $3^n\equiv 2^n[p]$ **ومنه** $(3^n)^r\equiv(2^n)^r[p]$ **لان** $r\in\mathbb{N}$ **، إذن** $3^{nr}\equiv 2^{nr}[p]$ **؛ ومنه** $3^{1+k(p-1)}\equiv 2^{1+k(p-1)}\ [p]$ **؛ وبما أنه وحسب 1. ب:** $3^{p-1}\equiv 1[p]$ **و** $2^{p-1}\equiv 1[p]$ **فان** $(3^{p-1})^k\equiv 1[p]$ **و** $(2^{p-1})^k\equiv 1[p]$ **لان** $k\in\mathbb{N}$ **إذن** $3^{k(p-1)}\equiv 1[p]$ **و** $2^{k(p-1)}\equiv 1[p]$ **، إذن** $3^{1+k(p-1)}\equiv 3[p]$ **و** $2^{1+k(p-1)}\equiv 2[p]$ **؛ إذن** $3\equiv 2[p]$ **أي أن** $p|3-2$ **أي** $p|1$ **وهذا يتناقض مع كون** p **أولي ؛ إذن ما افترضناه غير صحيح ؛ وبالتالي لا يوجد عدد صحيح طبيعي** n **اكبر قطعا من**1 **يحقق**(R) **.**

مسالة:

الجزء الاول :

1. ا.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{x-1}{x\ln(x)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1}{x\dfrac{\ln(x)}{x-1}}$$

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

9	المعامل:		الرياضيات	المــــــادة:
4س	مدة الإنجاز:		شعبة العلوم الرياضية ا و ب	الشعـــب(ة):

وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} \frac{\ln(x)}{x-1}=1$ فان $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} x\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} h(x)=1=h(1)$ ،إذن h متصلة على اليمين في العدد 1

ب. نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ ب : $H(x)=\ln(x)-x+1$ $(\forall x\in[1,+\infty[)$ ، إذن هذه الدالة قابلة للاشتقاق على هذا المجال

و $H'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ إذن $H'(x)\prec0$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ ، ومنه H تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ،إذن

$H(x)\prec H(1)$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ أي $\ln(x)-x+1\prec0$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ $(H(1)=0)$

وبالتالي $\ln(x)\prec x-1$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و $h'(x)=\frac{x\ln(x)-(\ln(x)+1)(x-1)}{(x\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)-x+1}{(x\ln(x))^2}$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ إذن حسب

ما سبق وكون $(x\ln(x))^2\succ0$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ ف : $h'(x)\prec0$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ إذن h تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

.2 ا.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\ln(x)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\ln(x)}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1\times0=0$

حسب 1. ب. وما سبق لدينا جدول تغيرات h التالي :

x	1	$+\infty$
h(x)	1 ↘	0

ب . حسب ما سبق h تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$ وبما أنها متصلة على اليمين في العدد 1 فإنها تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ،

وبما أن h متصلة عليه لأنها متصلة على اليمين في 1 وهي جداء الدالتين $x\mapsto\frac{x-1}{x}$ و(جذرية) $x\mapsto\frac{1}{\ln(x)}$ المتصلتين على $]1,+\infty[$.

($(\forall x\in]1,+\infty[)$ $\ln(x)\neq0$) فان h تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو $]0,1]$ إذن $0\prec h(x)\leq1$ $(\forall x\in[1,+\infty[)$

الجزء الثاني :

.1 ا. ليكن $x\in]1,+\infty[$ ، إذن :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{(\ln t)'}{\ln t}\,dt$$

$$= \Big[\ln(\ln t)\Big]_x^{x^2}$$

$$= \ln\left(\ln\left(x^2\right)\right) - \ln\left(\ln(x)\right)$$

$$= \ln\left(2\ln(x)\right) - \ln\left(\ln(x)\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\left(\ln(x)\right) - \ln\left(\ln(x)\right)$$

$$= \ln 2$$

ب. ليكن $x \in \left]1,+\infty\right[$ ، **إذن :**

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt - \ln 2$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$$

ج. ليكن $x \in \left]1,+\infty\right[$ ، **إذن :** $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$.

نضع $u = \sqrt{t}$ **إذن:**

$$\begin{cases} du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \Leftrightarrow dt = 2u\,du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{x} \\ t = x^2 \Leftrightarrow u = x \end{cases}$$

ومنه :

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــادة:	**الرياضيات**	**المعامل:**	**9**
الشعـــب(ة):	**شعبة العلوم الرياضية ا و ب**	**مدة الإنجاز:**	**4س**

$$g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{u-1}{u^2\ln\left(u^2\right)}2u\,du$$

$$=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{u-1}{2u\ln(u)}2\,du$$

$$=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{u-1}{u\ln(u)}du$$

$$=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt$$

2. ا. ليكن $x\in\,]1,+\infty[$ **، إذن وبما أن** h **تناقصية على المجال** $]1,+\infty[$ **فانه لكل** t **من المجال** $\left[\sqrt{x},x\right]$ $h(x)\le h(t)\le h\left(\sqrt{x}\right)$

وبما أن الدالة h **متصلة على المجال** $]1,+\infty[$ **و** $1\prec\sqrt{x}\le x$ **فان** $\int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)\,dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)\,dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h\left(\sqrt{x}\right)dt$

إذن وحسب 1. ج . $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln(2)\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

إذن : $\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)\quad\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln(2)\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

ب . $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}$

وبما أن : $\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)\quad\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln(2)\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

فان : $\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)\quad\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(x)\le\frac{g(x)-\ln(2)}{x-1}\le\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h\left(\sqrt{x}\right)$ **لان :** $\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)\quad x-1\succ0$

وبما أن :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\sqrt{x}=1$ **و** h **متصلة على اليمين في** 1 **اذن** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}h\left(\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}h(x)=1$

فان $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h\left(\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(x)=\frac{1}{2}$ **ومنه** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$ **إذن** g **قابلة للاشتقاق على اليمين في و** $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

ج . وبما أن $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln(2)\quad\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)$ **و**

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

9	المعامل:	الرياضيات	*المـــــادة:*
4س	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	*الشعـــب(ة):*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=+\infty$$

لان $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\quad \frac{\ln x}{x}\succ 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}=+\infty$

فان $\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(g\left(x\right)-\ln 2\right)+\ln 2=+\infty$

ومن جهة أخرى $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\quad \frac{\left(x-\sqrt{x}\right)}{x}h\left(x\right)\le\frac{g\left(x\right)-\ln\left(2\right)}{x}\le\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)}{x}h\left(\sqrt{x}\right)$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}h\left(x\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}h\left(\sqrt{x}\right)=\lim_{X\to+\infty}h\left(X\right)=0\quad\left(X=\sqrt{x}\right)$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-\ln 2}{x}+\frac{\ln 2}{x}=0$

3 . ا. حسب الجزء الأول 2 . ب . الدالة h متصلة على المجال $\left]1,+\infty\right[$ إذن تقبل دوال أصلية عليه ، لتكن K إحدى هذه الدوال الأصلية ل h على هذا المجال ،

إذن K قابلة للاشتقاق على $\left]1,+\infty\right[$ وحسب الجزء الأول 2 . ب : $\quad g\left(x\right)=K\left(x\right)-K\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(2\right)\quad\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)$

وبما أن الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $\left]1,+\infty\right[$ و $\sqrt{x}\in\left]1,+\infty\right[\quad\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)$ فان الدالة: $x\mapsto K\left(x\right)-K\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(2\right)$ ،

أي g ، قابلة للاشتقاق على $\left]1,+\infty\right[$ و

$$\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\quad g'\left(x\right)=K'\left(x\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}K'\left(\sqrt{x}\right)$$

$$=h\left(x\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}h\left(\sqrt{x}\right)$$

إذن :

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

$$(\forall x\in\,]1,+\infty[)\quad g'(x)=\frac{x-1}{x\ln x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x-1}{x\ln x}-\frac{\sqrt{x}-1}{x\ln x}$$
$$=\frac{x-\sqrt{x}}{x\ln x}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x\ln x}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$$

ب . بما أن : $(\forall x\in\,]1,+\infty[)\quad g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$ و $(\forall x\in\,]1,+\infty[)\quad 0\prec h(x)\le 1$ و $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad \sqrt{x}\succ 1$ و $(\forall x\in\,]1,+\infty[)$ $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

فان $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\prec g'(x)\le\frac{1}{2}$ **مع** $g'(1)=g'_d(1)$ **، إذن** g **تزايدية قطعا على المجال** $[1,+\infty[$ **ومنه:**

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
g(x)	ln2 $\longrightarrow$ $+\infty$

ج . انظر الورقة الأخيرة (المنحنى من انجاز محمد اعلو طالب مفتش بمركز تكوين مفتشي التعليم بالرباط)

الجزء الثالث :

I. 1 . الدالة g **متصلة على المجال** $[1,+\infty[$ **لأنها قابلة لاشتقاق عليه (حسب الجزء السابق 2. ب. و 3 . ا .) و الدالة** $x\mapsto -x+1$ **متصلة على** $\mathbb{R}$ **وخصوصا على** $[1,+\infty[$ **لأنها دالة حدودية ، إذن الدالة** $x\mapsto g(x)-x+1$ **، أي** k **، متصلة على** $[1,+\infty[$ **وهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال** $[1,+\infty[$ **و** $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad k'(x)=g'(x)-1$ **؛ وبما أن :** $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\prec g'(x)\le\frac{1}{2}$ **فان :** $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad -1\prec k'(x)\le-\frac{1}{2}$ **، إذن** k **تناقصية قطعا على المجال** $[1,+\infty[$ **، وبما أنها متصلة عليه فهي تقابل منه نحو المجال** $k\left([1,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]=\,]-\infty,\ln 2]$ **لان** $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)+1=-\infty$ **(** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ **)** **و** $k(1)=g(1)-1+1=\ln 2$ **.**

2. بما أن k **تقابل من** $[1,+\infty[$ **نحو المجال** $]-\infty,\ln 2]$ **و** $\ln 2\succ 0$ **فان العدد** 0 **من المجال** $]-\infty,\ln 2]$ **يقبل سابقا وحيدا** α **في المجال**

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

المـــــــــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعـــــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	مدة الإنجاز:	4س

بالدالة k $[1,+\infty[$ ، إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1,+\infty[$ حيث $k(\alpha)=0$ ، وبما أن $k(1)\succ 0$ فإن $\alpha\in]1,+\infty[$ وهو الوحيد في هذا المجال الذي يحقق : $1+g(\alpha)=\alpha$ $\left((\forall x\in[1,+\infty[)\quad k(x)=0\Leftrightarrow 1+g(x)=x\right)$

II. 1 . ا . بالترجع : من اجل $n=0$ ، $1\le u_0\prec\alpha$ حسب المعطيات .

نفترض أن $1\le u_n\prec\alpha$ من اجل n من IN ، إذن : وبما أن g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ و $\alpha\succ 1$ فإن $g(1)\le g(u_n)\prec g(\alpha)$

ومنه $1+\ln 2\le 1+g(u_n)\prec 1+g(\alpha)$ اذن $1\le u_{n+1}\prec\alpha$

وبالتالي وحسب مبدا الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le u_n\prec\alpha$.

ب . ليكن n من IN ، إذن : $u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n=k(u_n)$

وبما أن الدالة k تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ و $1\le u_n\prec\alpha$ فان $k(\alpha)\prec k(u_n)$ وبما أن $k(\alpha)=0$ فان $0\prec k(u_n)$

إذن $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه $u_{n+1}\succ u_n$

وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}\succ u_n$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تزايدية قطعا .

ج. بما أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تزايدية قطعا ، وحسب II.1. ا . $(u_n)_{n\ge 0}$ مكبورة بالعدد α ، إذن $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة .

وبما أن $u_{n+1}=1+g(u_n)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ و $u_n\in[1,\alpha]\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ والدالة $G:x\mapsto g(x)+1$ متصلة على المجال $[1,\alpha]$ وتزايدية قطعا عليه إذن $G([1,\alpha])=[G(1),G(\alpha)]=[1+\ln 2,\alpha]$ ومنه $G([1,\alpha])\subset[1,\alpha]$ و $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة ، إذن نهايتها هي حل المعادلة $G(x)=x$ في المجال $[1,\alpha]$ ؛ وبما أن α هو الحل الوحيد للمعادلة السابقة في المجال $[1,+\infty[$ و $[1,\alpha]\subset[1,+\infty[$ فان α هو الحل الوحيد للمعادلة السابقة في المجال $[1,\alpha]$ ؛ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

2 . ا . ليكن n من IN ، إذن : $|u_{n+1}-\alpha|=|G(u_n)-G(\alpha)|$:(ا)، وبما أن الدالة G متصلة على $[1,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عليه و $G'(x)=g'(x)\quad(\forall x\in[1,+\infty[)$ و $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\prec g'(x)\le\frac{1}{2}$ (حسب الجزء الثاني 3. ب .) إذن $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\prec G'(x)\le\frac{1}{2}$ فان الدالة G متصلة على $[u_n,\alpha]$ وقابلة للاشتقاق على $]u_n,\alpha[$ و $(\forall x\in]u_n,\alpha[)\quad 0\prec G'(x)\le\frac{1}{2}$ ؛ إذن حسب إحدى متفاوتتي التزايدات المنتهية $|G(u_n)-G(\alpha)|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ ومنه وحسب المتساوية ح (ا)، $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$. وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب . بالترجع : من اجل $n=0$ ، المتفاوتة محققة لان $|u_0-\alpha|=\left(\frac{1}{2}\right)^0|u_0-\alpha|$.

نفترض أن $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ من اجل n من IN ، إذن : $\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$ ؛ وبما أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ (حسب السؤال السابق) فان : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$.

مقترح تصحيح الامتحان الوطني

16/06/2013

9	**المعامل:**	الرياضيات	*المـــــادة:*
4س	**مدة الإنجاز:**	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	*الشعــــب(ة):*

وبالتالي وحسب مبدا الترجع : $|u_0-\alpha|\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq |u_n-\alpha| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

ج . بما أن : $|u_0-\alpha|\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq |u_n-\alpha| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ **لان** $-1\prec\frac{1}{2}\prec 1$ **فان** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ **ومنه** $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.