تمرين1

نعتبرالمجموعة التالية $E=\{-15;-9;-3;3;9;15\}$ ونزودها بالقانون $\wedge$ حيث $\wedge$ هو القاسم المشترك الأكبر.

1. ارسم جدول القانون $\wedge$.
2. حدد جزءا مستقرا بالقانون $\wedge$.
3. ادكر دون برهان بعض خواص القانون $\wedge$.

تمرين2

في v_3 نعتبر قانون التركيب الداخلي $\wedge$ (الجداء المتجهي)

1. هل $\wedge$ يقبل عنصرا محايدا.
2. هل $\wedge$ تبادلي.
3. ليكن $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس متعامد وممنظم ومباشر.

أ. حدد اصغر جزء مستقر في $(v_3,\wedge)$ ويضم $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$.

ب. باستعمال الأساس السابق بين أن $\wedge$ ليس تجميعيا.

تمرين3

لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي حيث

$\exists e\in E:\forall x\in E\ \ x*x=e\ \ et\ \ x*e=x$

جزء 1

1. بين أن $(E,*)$ يقبل عنصرا محايدا وحدده .
2. بين أن كل عنصر من E يقبل مماثلا وحدده .
3. برهن أن القانون $*$ تبادلي .

جزء 2

نضع $E=\{a;b;c;e\}$ حيث e يحقق الشروط السابقة .

علما أن $a*b=c$ ضع جدول القانون الداخلي $*$.

تمرين4

جزء 1

نعتبر مجموعة $(E,*)$ مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي يقبل عنصرا محايدا e . ولتكن U مجموعة عناصر E التي تقبل مماثلات بالقانون $*$.

1. ا. تأكد أن U غير فارغة .

ت. بين أن U جزء مستقر بالقانون $*$.

2. ا. لتكن $a\in E$. بين أن العبارات التالية متكافئة

$(P):a\in U$ و $\delta_a:\begin{matrix}E\to E\\ x\mapsto x*a\end{matrix}$ تقابل $(Q):$ و

$\gamma_a:\begin{matrix}E\to E\\ x\mapsto a*x\end{matrix}$ تقابل $(R):$

ب. ليكن $a\in U$ و $b\in U$ حدد $\gamma_a\circ\gamma_b$ واستنتج γ_a^{-1} .

3.ا. بين أنه اذا كان $a\in U$ فان a منتظم .

ب. هل العكس صحيح .

جزء 2

ناخد $E=\mathrm{A}(F)$ حيث F مجموعة غير فارغة و $\mathrm{A}(F)$ مجموعة التطبيقات المعرفة على F ونزودها بالقانون $\circ$.

1. ا. حدد U.

ب. بين أن $\mathrm{B}(F)$ مجموعة تقابلات F جزء مستقر في $(E,\circ)$.

2. ليكن $(f,g)\in E^2$. حدد $\gamma_f\circ\gamma_g$ واستنتج γ_f^{-1} و $\gamma_{f^{-1}}$ لكل عنصر f من $\mathrm{B}(F)$.

تمرين5

لكل عدد حقيقي a نعتبر الدالة f_a المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f_a(x)=e^{ax}$ لكل x من $\mathbb{R}$. ولتكن E المجموعة المعرفة بما يلي $E=\{f_a:a\in IR\}$. نزود هده المجموعة بقانون ضرب الدوال العددية.

1. بين أن $\times$ قانون تركيب داخلي في E .
2. حدد خاصيات القانون $\times$ في E .
3. ليكن $*$ القانون الداخلي المعرف على E كما يلي

$\forall(a,b)\in IR^2\ \ f_a*f_b=f_{ab}$

ولتكن φ الدالة المعرفة بما يلي $\begin{matrix}\varphi:IR\to E\\ a\mapsto f_a\end{matrix}$

أ. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR,\times)$ نحو $(E,*)$.

ب. استنتج خاصيات القانون $*$.

ت. حدد مماثل كل عنصر f_a من E بالقانون $*$ عند وجوده .

ث. لكل من ولكل من نضع $(f_a)^n=\underbrace{f_a*f_a*...*f_a}_{n\ termes}$

اكتب الجداء $\prod_{i=1}^{n}(f_a)^i$ بدلالة a^n .

تمرين6

نعتبر المجال $I=[1,+\infty[$ ونزوده بالقانون الداخلي $*$ المعرف ب

$\forall(a,b)\in I^2:a*b=\sqrt[3]{a^3+b^3-1}$

1. ادرس تبادلية و تجميعية القانون $*$ في I .
2. أثبت أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I وحدده.
3. حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(I,*)$
4. نعتبر التطبيق $\begin{matrix}f:I\to IR^+\\ x\mapsto x^3-1\end{matrix}$

أ. اثبت أن f تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(IR_+,+)$.

ب. ليكن a من I و n من IN^*

احسب $\underbrace{a*a*...*a}_{n\ termes}$

تمرين7

نضع $E=\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ ونزود $\mathbb{C}$ بالقانون T المعرف ب

$zTz'=zz'+i(z+z')-(1+i)$ لكل z و z' من $\mathbb{C}$

1. بين أن E جزء مستقر من $(\mathbb{C},T)$.
2. بين أن $e=1-i$ عنصر محايد في (E,T).
3. حدد خاصيات القانون T في E (تبادلية تجميعية مماثل عنصر).
4. نعتبر التطبيق المعرف ب $f:\mathbb{C}^*\to E,\ z\mapsto z-i$

أ. بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو (E,T).

ب. استنتج بطريقة ثانية خاصيات (E,T).