الفرض الثاني باللغتين العربية و الفرنسية

المستوى الدراسي : السنة الأولى بكالوريا — الشعبة : علوم رياضية

تاريخ التمرير : الجمعة 22 دجنبر 2017 — مدة الإنجاز : 3 ساعات و 30 دقيقة

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة و المديرية الإقليمية .

Exercice 1 : Soient ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit. On considère un point E de la tangente (T) au cercle $(\mathcal{C})$ au point A. Les points P et Q sont respectivement les projections orthogonales du point E sur les droites (AB) et (AC).

1. Montrer que les droites (PQ) et (BC) sont perpendiculaires.
2. La tangente (T) et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupent la droite (BC) respectivement aux points F et D. Montrer que $FD = FA$.

التمرين 1 : ليكن ABC مثلثاً و $(\mathcal{C})$ دائرته المحيطة . نعتبر نقطة E من المماس (T) للدئرة $(\mathcal{C})$ في النقطة A . النقطتان P و Q هما على التوالي المسقطين العموديين للنقطة E على المستقيمين (AB) و (AC) .

1. بيّن أن المستقيمين (PQ) و (BC) متعامدان .
2. المماس (T) و المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BAC}$ يقطعان المستقيم (BC) في النقطتين F و D على التوالي . بيّن أن $FD = FA$.

Exercice 2 : Soient N un nombre entier naturel et x_1, x_2,…, x_{2N+2} des nombres réels de l'intervalle $[-N, N+1]$ tels que $x_k \notin \mathbb{Z}$ pour tout k de l'ensemble $\{1, 2 \ldots, 2N+2\}$.

1. Prouver que :
$$-2N(N+1) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} [x_i] \leq 2N(N+1).$$
2. Montrer qu'il existe i et j de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$, avec $i \neq j$, tels que
$$[|x_i - x_j|] = 0.$$

Rappel : la partie entière du nombre réel x, notée $[x]$, est l'unique entier relatif p qui vérifie : $p \leq x < p+1$.

التمرين 2 : ليكن N عدداً صحيحاً طبيعياً و x_1 و x_2 و … و x_{2N+2} أعدادا حقيقية من المجال $[-N, N+1]$ حيث $x_k \notin \mathbb{Z}$ لكل k من المجموعة $\{1, 2 \ldots, 2N+2\}$.

1. أثبت أن : $-2N(N+1) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} [x_i] \leq 2N(N+1)$.
2. بيّن أنه يوجد i و j من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$، مع $i \neq j$، بحيث $[|x_i - x_j|] = 0$.

تذكير : الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x، الذي يرمز له بالرمز $[x]$ ، هو العدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق : $p \leq x < p+1$.

Exercice 3 : Soient x, y, z, a, b et c des nombres réels qui vérifient :
$$a+x \geq b+y \geq c+z \geq 0 \text{ et } a+b+c = x+y+z.$$
Prouver que : $ay + bx \geq ac + xz$.

التمرين 3 : لتكن x و y و z و a و b و c أعداداً حقيقية تحقق :

$a+x \geq b+y \geq c+z \geq 0$ و $a+b+c = x+y+z$.

أثبت أن : $ay + bx \geq ac + xz$.