تمرين01

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2+x^2}$.

و لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

I) دراسة المتتالية $(u_n)_n$:

1) – أ- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$.

ج - استنتج رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

د – استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة .

2) - أ – بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n$.

ب – أثبت أن : $\forall n \in IN, u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

ج- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

II)- دراسة $(u_n)_n$ باستعمال الدالة

ليكن I مجال $\mathbb{R}$ حيث : $I =]0, \sqrt{2}[$.

1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = x$.

2)- أ – أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب –بين أن f تزايدية قطعا على $[0, \sqrt{2}]$ و تناقصية قطعا على $[\sqrt{2}, +\infty[$.

ج – أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
(لاحظ أن f دالة فردية).

3) - أ - بين أن : $f(I) \subset I$.

ب- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

ج - باستعمال رتابة f أثبت أن (u_n) تناقصية قطعا

د استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) - لتكن g قصور الدالة f على المجال I.

أ – بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده .

ب – حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة g.

تمرين02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

I)- دراسة المتتالية $(u_n)_n$

1)-أ- أحسب : u_1 و u_2.

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$.

2)-أ- بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية قطعا .

ب- استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.

3)-أ- أثبت المتساوية التالية:

$\forall n \in IN, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)(u_n - \sqrt{2})$.

ب-استنتج المتفاوتتين التاليتين:

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$.

ج- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

II)- دراسة $(u_n)_n$ باستعمال الدالة

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

1)-أدرس رتابة f على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$

2)- حل في $]0, +\infty[$ المعادلة: $f(x) = x$

3)- نعتبر المجال $I =]\sqrt{2}, 2]$.

أ- بين أن : $f(I) \subset I$.

ب- برهن بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

ج- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

د- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة

ه- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

ملاحظة :

المتتالية $(u_n)_n$ هي متتالية أعداد جذرية تؤول إلى عدد غير جذري.