Corrigé sommaire de l'examen du Bac 2018

Durée : $4h$

Arithmétique(Exercice 2)

Exercice 1 Soit p un nombre premier de la forme $p = 3 + 4k,\ k \in \mathbb{N}^\star$.

1. On a par hypothèse x vérifie $x^2 \equiv 1 \mod p$. On remarque $p - 5 = 4k - 2 = 2(2k - 1)$. D'où $x^{p-5} \equiv (x^2)^{2k-1} \equiv 1 \mod p$.
2. On a $x^{p-5} \equiv 1 \mod p$

   a. Si p et x n'étaient pas premiers entre eux, alors p diviserait x et on aura $x \equiv 0 \mod p$, par suite $x^{p-5} \equiv 0 \mod p$. Par absurde, le résultat est établi.

   b. Comme x et p sont premiers entre eux, alors d'aprés le théorème de Fermat on a $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

   c. On vérifie facilement que $2 + (k - 1)(p - 1) = k(p - 5)$ (il suffit de réécrire que $p = 3 + 4k$ et le remplacer par sa valeur.)

   d. D'après la question précédente, on a :

$$(x^{p-5})^k \equiv x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv x^2(x^{p-1})^{k-1} \mod p.$$

   Comme $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$ et $x^{p-5} \equiv 1 \mod p$ alors $x^2 \equiv 1 \mod p$.
3. On vérifie sans peine que le nombre 67 est premier. De plus $67 = 3 + 4 \times 16 = 3 + 4k$ avec $k = 16$. La donnée $x^{62} \equiv 1 \mod 67$ s'écrit $x^{67-5} \equiv 1 \mod 67$. D'aprés ce qui précéde, cette équation est équivalente à $x^2 \equiv 1 \mod 67$. Enfin, celle-ci équivaut à $67/(x-1)$ ou $67/(x+1)$(ici le symbole "/" signifie "divise"). Donc x s'écrit $x = 1 + 67m$ ou $x = -1 + 67m$, m étant un entier relatif quelconque.

Structures algébriques(Exercice 1)

Exercice 2

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (commutatif), que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni des lois internes $+$ et $\times$ est un annaeau non commutatif unitaire d'unité la matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et de zéro la matrice nulle $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +, .)$ muni de la loi externe "." est un espace vectoriel réél. Dans cet exercice, on considère l'ensemble

$$E = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1) L'ensemble E est trivialement non vide. Il contient $0_2 = M(0, 0)$. Pour toutes matrices $M(a, b)$ et $M(x, y)$ appartenant à E, on a $M(a, b) - M(x, y) = M(a - x, b - y)$ (vérification immédiate) donc $(E, +)$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$
2) **a.** Grace à la question précédente, il suffit de vérifier que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall M \in E$, on $\lambda M(x, y) \in E$. un calcul direct donne $\lambda M(x, y) = M(\lambda x, \lambda y) \in E$. Le candidat doit rédiger minutieusement l'opération même si elle apparait futile.

   b. On pose $J = M(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il est facile de voir que pour tout(e) $M(x, y)$ dans E, on a $M(x, y) = xI_2 + yJ$. Donc la famille $\{I, J\}$ est génératrice de E.

En écrivant une combinaison nulle de I_2 et J c'est-à(dire $aI_2+bJ=0_2$), on s'apeçoit vite que cela équivaut à dire $M(a,b)=0_2$. Par identification des coefficients, on obtient $a=b=0$. Autrement dit $\{I,J\}$ est une famille libre. Etant libre et génératrice, cette famille est une base de E.

3) **a.** Soit $M(x,y)\in E$ et $M(a,b)\in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(a,b) = & \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} xa-2yb & -2xb-2ya-4yb \\ ya+bx+2by & xa+2bx+2ya+2by \end{pmatrix} \\ = & M(xa-2yb, ya+bx+2by). \end{aligned}$$

Ainsi, $(E,\times)$ est une partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. L'ensemble E est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$ et est stable par la multiplicatin interne $\times$. La distributivité de celle-ci par rapport à l'addition provient de cette propriété vérifiée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De même pour l'associativité de $\times$. Donc $(E,+;\times)$ est un sous anneau (unitaire car $I_2=M(1,0)\in E$) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le calcul effectué à la question 3) exprime que $= M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-2yb, ya+bx+2by) = M(a,b)\times M(x,y)$. D'où la commutativité de l'anneau $(E,+,\times)$.

4) **a.** Montrons que ϕ est un homomorphisme. Pour $z=x+iy$ et $z'=a+ib$, on a :

$$\phi(zz') = \phi(ax-by+i(ay+bx)) = \begin{pmatrix} ax-by+ay+bx & 2(ay+bx) \\ -ay-bx & ax-by+ay+bx-ay-bx \end{pmatrix}$$

c-à-dire

$$\phi(zz') = \phi(ax-by+i(ay+bx)) = \begin{pmatrix} ax-by+ay+bx & 2(ay+bx) \\ -ay-bx & ax-by \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\phi(z)\times\phi(z') = \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by+ay+bx & 2(ay+bx) \\ -ay-bx & ax-by \end{pmatrix}.$$

Ceci exprime que $\phi(zz')=\phi(z)\times\phi(z')$, c'est-à-dire que ϕ est bien un morphisme de $(\mathbb{C}^\star,\times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

b. Montrons que $\phi(\mathbb{C}^\star)=E^\star=E-\{0_2\}$. Soit $z=x+iy$ dans $\mathbb{C}^\star$ alors $\phi(z)=M(x,-y)\in E$. De plus, $z\neq 0$ équivaut à dire que $(x,y)\neq(0,0)$ donc $M(x,y)\neq 0_2$. Finalement $\phi(z)\in E^\star$. Réciproquement, si $M(a,b)$ est dans $E^\star$, il suffit de choisir $z=x-iy\neq 0$ pour avoir $\phi(z)=M$.

c. L'homomorphisme ϕ est, d'aprés ce qui précéde, bijectif car surjectif et trivialeent injectif par construction (c'est donc un isomorphisme) entre $\mathbb{C}^\star$, qui est un groupe commutatif, et $E^\star$, donc ce dernier est lui-même un groupe commutatif.

5) Comme $(E,+;\times)$ est un anneau et que $E^\star$ est un groupe, alors $(E,+;\times)$ est bien corps. Le corps $(E,+;\times)$ est commutatif car d'aprés la questionn précédente, $(E^\star;\times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 (4x1 points)

Soit m un nombre complexe.

I)-On considère l'équation (E_m) d'inconnu z :

$$(E_m): \qquad z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

1. **a.** Vérification immédiate. $\Delta = (im-2i)^2$.

   b. Pour toute valeur complexe de m, l'équation (E_m) admet deux solutions z_1 et z_2 données par : $z_1 = \frac{-im-2-im+2i}{2} = -1-i(m-1)$ et $z_2 = \frac{-im-2+im-2i}{2} = -1-i$

2. On prend $m = i\sqrt{2}$. Alors $z_1 = -1-i(\sqrt{2}-1)$ et $z_2 = -1+i$.
   On a : $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ puis $z_2 = -i\sqrt{2} + \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{3i\pi}{4}})$. D'où $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{8}}(e^{\frac{-i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}}) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8})e^{\frac{5i\pi}{8}}$. Comme $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$, l'écriture exponentielle est ainsi déterminée.

II)-Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A(a=-1-i)$, $\omega(\Omega = i)$, $M(m)$ et $M'(m' = -im-1+i)$.

1. Soit R la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ telle que $R(M) = M'$.

   a. Il suffit de vérifier que le point Ω est invariant par R(c'est d'ailleurs le seul.) Si $H(h)$ désigne le centre de la rotation R. L'écriture complexe de celle-ci est

   $$z' = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-h) + h = -i(z-h) + h.$$

   Comme $R(M) = M'$ alors $-im-1+i = -i(m-h)+h$. En résolvant cette équation en h, on trouve $h = i = \omega$ c'est-à-dire que $H = \Omega$.

   b. Le point B est l'antécédent de A. Soit on détermine la rotation réciproque $R^{-1}(\Omega,\frac{\pi}{2})$, soit on érit $R(B) = A \Leftrightarrow a = -i(b-\omega)+\omega \Leftrightarrow b = \omega + i(a-\omega) \Leftrightarrow b = i + i(-1-2i) = 2$.

2. **a.** Vérification immédiate par calcul direct. Ici nous présentons une rédation différente. Il suffit d'écrire

   $$a - \omega = -i(b-\omega) \tag{1}$$

   puis

   $$m' - \omega = -i(m-\omega) \tag{2}$$

   qui traduisent le fait que $R(B) = A$ et $R(M) = M'$. En soustrayant (1) de (2), il vient : $m' - \omega = -i(m-b)$. Mais (1) équivaut à dire $-i = \frac{a-\omega}{b-\omega}$. D'où l'égalité demandée.

   b. Pour $m = -1-i$, le résultat demandé est évident. Supposons $m = a$, alors $m' - a = \frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$ équivaut à $\frac{m'-a}{m-a} = \frac{\omega-a}{\omega-b}\frac{m-b}{m-a}$. Il en résulte que $\arg(\frac{m'-a}{m-a}) = \arg(\frac{\omega-a}{\omega-b}) + \arg(\frac{m-b}{m-a})$. Ainsi, dire que les points A, M et M' sont alignés équivaut à dire $\arg(\frac{m'-a}{m-a}) \equiv 0 \mod \pi$. Ce qui équivaut à dire $(\widehat{\vec{AM};\vec{AM'}}) + (\widehat{\vec{AM};\vec{BM}}) \mod \pi$. Cette condition est équivalente à dire que les quatre points A, B, Ω et M sont cocycliques.

   c. La question précédente affirme que les points A, M et M' sont alignés ssi M appartient au cercle cicinscrit au triangle $AB\Omega$. Donc l'ensembles des points M' est le cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$ dont le centre et le rayon sont faciles à déterminer. En effet, puisque $R(B) = A$, alors le triangle ΩAB est rectangle et isocèle, par suite, le centre demandé est le milieu de la longue hypothénuse $[AB]$. Le rayon est $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Analyse 1(Exercice 4)

Partie I

1. Soit $x > 0$.
   - **a.** Pour tout$x > 0$ on a $I = \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t}dt = [t - \ln(t+1)]_0^x = x - \ln(1+x)$. $(\ln 1 = 0)$
   - **b.** Le changement est légitime car $x > 0$. Ensuite $u = t^2$ donne $du = 2tdt$. Les bornes $t = 0$ et $t = x$ entrainent $u = 0$ et $u = x^2$. D'où $I = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$.
   - **c.** La fonction $u \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{u}}$ est manifestement décroissante comme composée des deux fonctions $u \mapsto \sqrt{u}$ et $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ qui sont respectivement croissante et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (avec toutes les inclusions nécessaires pour assurer la définition et la monotonie de la composée). Donc pour $0 \leq u \leq x^2$, on a
   $$\frac{1}{1+\sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq \frac{1}{1+\sqrt{0}}$$
   soit
   $$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1.$$
   En divisant les trois membres par 2 puis intégrant entre 0 et x^2, on obtient
   $$\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x} \leq \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du \leq \frac{1}{2}x^2.$$
   Si $x = 0$ le résultat est trivial, sinon on divise les trois membres par x^2 tout en se rappelant que d'après la question 1 de cette partie $\frac{1}{2x^2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du = \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$.
2. Les deux membres extrêmes de la double inégalité précédentes tendent vers la même limite $\frac{1}{2}$ lorsque $x \to 0$, d'aprés les limites comparées on $\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $[0, \infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (\frac{x+1}{x})\ln(x+1) & si\ x \neq 0, \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. **a.** Il suffit de réécrire $f(x) = (x+1)\frac{\ln(x+1)}{x}$ et utiliser la limite usuelle $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0^+} = 1 = f(0)$ soit f est continue en zéro.
   - **b.** Montrons que f est dérivable à droite en 0. On écrit
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2}.$$
   Le dernier terme s'écrit
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}.$$
   Vu l'indication proposée (question 2.D Partie I), $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$. Ceci traduit la dérivabilité de f en zéro et de plus $f'(0) = \frac{1}{2}$.
   - **c.** D'abord,
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = 1 \times \infty = \infty.$$

Ensuite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}.\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1\times0=0.$$

Pour une petite précision, on écrit : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}.\frac{x+1}{x}=0.$

Interprétation graphique : la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet, au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

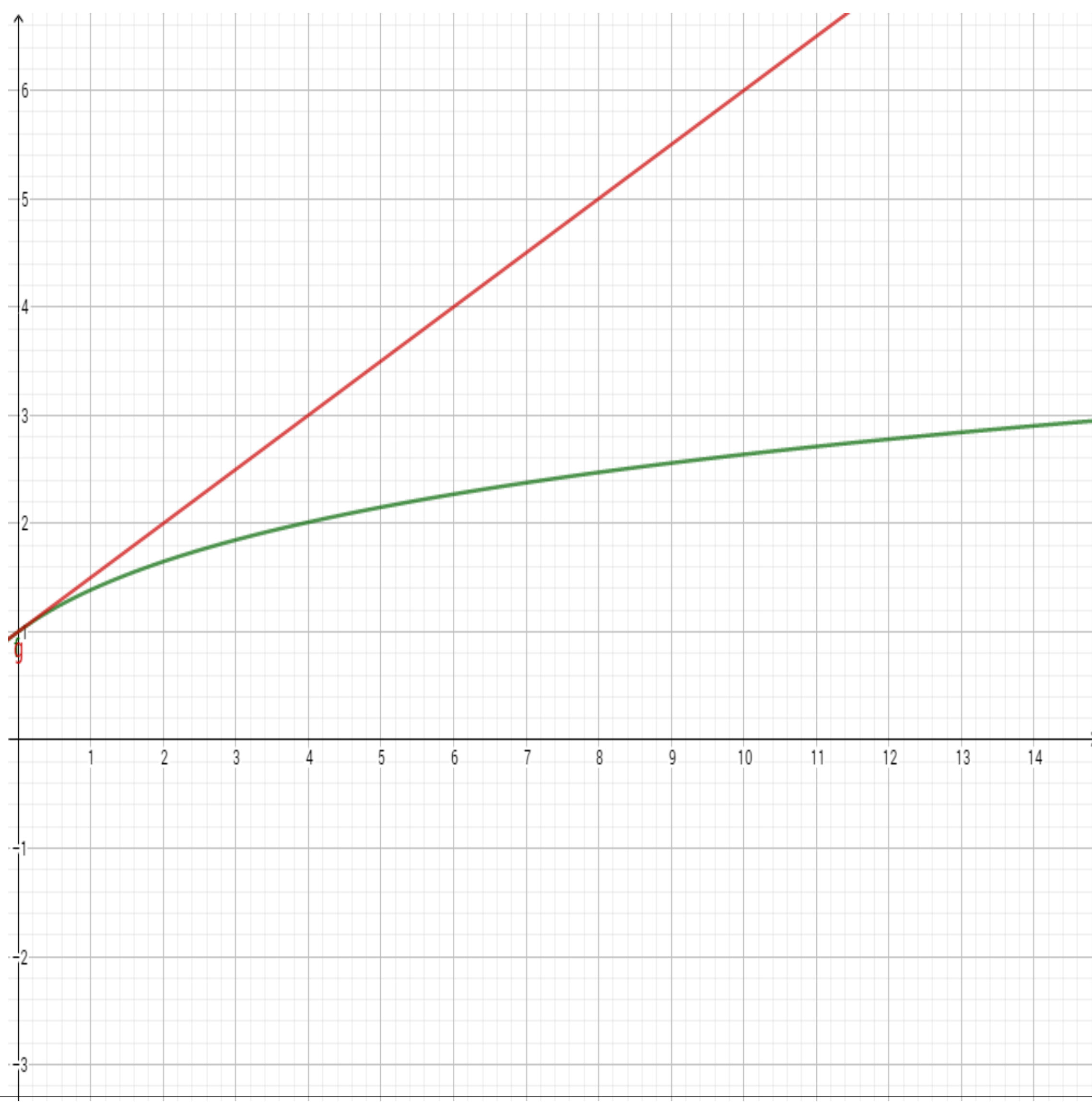
2. **a.** Vérification immédiate aprés avoir justifié convenablement la dérivabilité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

   b. Dans l'expression de $f'(x)$, le dénominateur est manifestement positif. Comme pour tout $t\geq0$, on a l'inégalité triviale $\frac{1}{t+1}\leq1$, il suffit d'intégrer cette dernière entre 0 et x pour aboutir à $\int_0^x\frac{1}{t+1}dt\leq\int_0^x 1dt$. L'inégalité $x-\ln(x+1)\geq0$ en découle aussitôt. Ainsi f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   c. Comme f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors

$$f([0;+\infty[)=[f(0);\lim_{+\infty}f(x)=[1;\infty[.$$

3. L'équation de la demi-tangente au point $(0,1)$ est $\begin{cases} y=f'(0)x+1=\frac{1}{2}x+1 \\ x\geq0.\end{cases}$



Partie III

1. On pose $g(x) = f(x) - x$.

   a. Pour établir que $\forall x \in]0; \infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, il suffit de rappeler que $f'(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$ et que la question 1.c de la **partie I** donne directement le résulat.

   b. On justifie brièvement la dérivabilité de g et on écrit pour tout $x > 0$, $g'(x) = f'(x) - 1 < f'(x) - \frac{1}{2} < 0$. D'où la décroissance de g. l'image de l'intervalle proposé se fait exactement à l'instar de la question **2.c Partie II.**

   c. Les conditions d'application du TVI(théorème des valeurs intermédiaires) sont satisfaites :
   - g est continue sur l'intervalle $I =]0; \infty[$,
   - $g(I) =]-\infty, -1[$,
   - $0 \in]-\infty, -1[$.

   Il existe donc un nombre $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$. Autrement dit $\exists \alpha \in I$ vérifiant $f(\alpha) = \alpha$. Comme g est strictement monotone (d'après la question précédente), alors la solution α est unique.

2. Soit a un nombre réel strictement positif. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Par récurrence sur n.
   - Initialisation : On a $u_0 = a > 0$.
   - Hérédité : Soit $n \geq 0$ un entier tel que $u_n > 0$. Puisque $f(0; \infty[[) = [1; \infty[$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [1; +\infty[$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$.

   b. Appliquons le Théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle I d'extrémités u_n et u_{n+1}. Ceci est possible car la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $\bar{I}$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $\dot{\hat{I}}$. Il existe alors $c_n \in \dot{\hat{I}}$ tel que

   $$u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(u_n - \alpha).$$

   Or $\forall x > 0 \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc

   $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|. \tag{3}$$

c. Montrons à l'aide d'une récurrence simple que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |a - \alpha|$ Le résultat est trivial pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \geq 0$. La relation (3) assure l'hérédité de cette propriété par $n + 1$.(Il suffit de l'écrire!!!)

d. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{2})^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \alpha| = 0$ (limites comparées) c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha.$$

Analyse 2(Exercice 5)

La fonction F est définie par $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. L'application $t \mapsto e^{t^2}$ est manifestement continue sur $\mathbb{R}$ comme composée des deux fonctions continues $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$. Donc F est dérivale sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue. De plus $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = e^{x^2}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x > 0$ alors $F'(x) > 0$. Il s'ensuit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. la monotonie de la fonction exponentielle et le fait que $t^2 \geq 0$ impliquent $e^{t^2} \geq 1$. Intégrons cette dernière inégalité entre 0 et x pour obtenir $F(x) \geq x$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ le théorème de comparaison des limites donne $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
3. Parité de F : la symétrie du domaine par rapport à zéro ne se pose pas car F est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite pour $x \in \mathbb{R}$, on a $F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$. Effectuons le changement de variable $u = -t$, il vient $F(-x) = -\int_0^x e^{u^2} du$ car $dt = -du$ et $e^{(-u)^2} = e^{u^2}$. Le caractère impair de F est ainsi prouvé.
   Finalement $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} F(-u) = -\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = -\infty$.
4. Comme F est continue et strictement croissante (d'aprés la question 1) alors elle est bijective de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $F(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} ; \lim\limits_{x\to+\infty}[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
5. On remarque sans peine que $F(0) = 0$ donc $G(0) = 0$. Comme $f'(0) = 1 \neq 0$, les théorèmes généraux du cours assurent que $G'(0) = \frac{1}{F'(G(0))} = \frac{1}{F'(0)} = 1$.