2 بالك علوم رياضية	تجريبي دورة فبراير 2012	ثانوية موسى بن نصير
المعامل : 09	لمادة الرياضيات	نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : 04 ساعات		

⇦ الإسم العائلي و الشخصي: .... النقطة: ....

■ التمرين رقم 01: $(1;5pts)$

⇦ ليكن العدد العقدي $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):(2-z)^3=a(2+z)^3$.

1)- حدد على الشكل الأسي الجذور المكعبة ل a .

2)- ليكن θ من $\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ ، بين أن :

$$(\forall z\in\mathbb{C}-\{-2\});\frac{2-z}{2+z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=-2i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$.

3)- باستعمال النتائج السابقة ، حدد في $\mathbb{C}$ مجموعة حلول المعادلة (E) .

■ التمرين رقم 02: $(3;5pts)$

⇦ ليكن m عددا عقديا غير منعدم .

و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(F):z^2-m(m+i)z+im^3=0$.

1)- أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F) .

ب- حدد على الشكل الجبري قيم m لكي تقبل المعادلة (F) حلين مترافقين .

ج- حدد على الشكل الجبري قيم m لكي يكون جداء حلي المعادلة (F) يساوي 1 .

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط :

A و M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : $a=-1$ و m و im و m^2 .

أ- حدد m لكي يكون المثلث AM_1M_2 متساوي الأضلاع .

ب- حدد المجموعة (E_1) للنقط M ذات اللحق m لكي تكون النقط A و M_1 و M_2 مستقيمية .

ج- حدد المجموعة (E_2) للنقط M ذات اللحق m لكي تكون $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{AM_2}$ متعامدتان .

3)- نفترض فيما يلي أن : $m=e^{i\theta}$ ، حيث $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

أ- بين أن المتجهتين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{AM_2}$ مستقيميتان .

ب- إنطلاقا من النقطة M ، أعط طريقة لإنشاء النقطتين M_1 و M_2 .

■ التمرين رقم 03: $(03pts)$

⇦ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G): z^3-4iz^2-(6+i)z+3i-1=0$.

1)- أ- بين أن المعادلة (G) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 ينبغي تحديده .

ب- حدد الحلين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة (G) بحيث : $\mathrm{Re}(z_1)=-1$.

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط : M_0 و M_1 و M_2 و M_3 التي أحاقها على التوالي : z_0 و z_1 و z_2 و $z_3=z_0+z_1+z_2$.

■ بين أن النقط M_0 و M_1 و M_2 و M_3 متداورة (و حدد شعاع و لحق مركز الدائرة المحيطة بها) .

3)- لتكن النقطة N ذات اللحق : $z_4=-\sqrt{2}+i$.

أ- بين أنه يوجد تحاك وحيد H مركزه M_0 و يحول M_1 إلى N محددا نسبته .

ب- بين أنه يوجد دوران وحيد R مركزه M_0 و يحول N إلى M_2 محددا قياسا لزاويته .

ج- أعط الكتابة العقدية للتحويل $H\circ R$.

د- حدد صورة المجموعة $(C)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z-i|=1\}$ بالتحويل $H\circ R$.

■ التمرين رقم 04: $(04pts)$

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 3$.

ولتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}); f_n(x)=x-n\ln x$.

1)- أحسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

2)- أثبت أن المعادلة : $(\mathrm{E}_n): f_n(x)=0$ تقبل حلين إثنين u_n و v_n بحيث : $0<u_n<n<v_n$.

3)- أ- بين أن : $(\forall n\geq 3);1<u_n<e$.

ب- بين أن : $(\forall n\geq 3); f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$.

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

د- أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^n=e$ و $\lim_{n\to+\infty} n(u_n-1)=1$.

4)- أ- أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 3}$.

ب- بين أن : $(\forall n\geq 3);n\ln(n)<v_n$.

ج- حدد إشارة الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي : $\varphi(x)=x-2\ln x$ ، ثم إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);n>2\ln(n)$.

د- إستنتج إشارة $f_n(2n\ln(n))$ ، ثم بين أن : $(\forall n\geq 3);v_n<2n\ln(n)$.

ه- بين أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n\ln(n)}=1$.

■ **التمرين رقم 05**: $\left(08pts\right)$

⇦ **الجزء الأول**: $\left(04pts\right)$

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f_n(0)=0$ و $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right); f_n(x)=x\times e^{\frac{-n}{x}}$.

1)- أ- أحسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f_n(x)$.

ب- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f_n على اليمين في الصفر و أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2)- بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ و أن :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right); f_n'(x)=\frac{x+n}{x}\times e^{\frac{-n}{x}}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f_n .

3)- بين أن المنحنى $\left(C_{f_n}\right)$ يقبل بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$ مقاربا مائلا $\left(\Delta_n\right)$ ينبغي تحديده .

4)- أرسم المنحنى $\left(C_{f_1}\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5)- أ- أثبت أن المعادلة : $\left(E_n\right): f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا u_n في $\mathbb{R}$.

ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); u_n>1$.

ج- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); f_n\left(u_{n+1}\right)=e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6)- أ- بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، العدد u_n حل للمعادلة : $\left(F_n\right): x\ln x=n$.

ب- بين أن الدالة φ المعرفة بما يلي : $\varphi(x)=x\ln x$ تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ج- ضع جدول تغيرات الدالة العكسية φ^{-1} ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⇦ **الجزء الثاني**: $\left(1;5pts\right)$

⇦ لتكن $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$v_0=1$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right); v_{n+1}=f_1\left(v_n\right)$.

1)- أ- بين أن : $f_1\left([0;1]\right)\subset[0;1]$.

ب- إستنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right); 0\le v_n\le1$.

2)- أدرس رتابة المتتالية $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أحسب نهايتها .

⇦ **الجزء الثالث**: $(2;5pts)$

⇦ لتكن G دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}^+$.

و لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F(x)=G(2x)-G(x)$.

1)– أ– بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})(\exists c\in]x;2x[);F(x)=x\times f_1(c)$.

ب– إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});x^2e^{\frac{-1}{x}}<F(x)<2x^2e^{\frac{-1}{2x}}$.

2)– أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ ، ثم أعط تأويليهما الهندسي .

3)– أدرس قابلية إشتقاق F على اليمين في الصفر ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4)– بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ ، و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F'(x)=xe^{\frac{-1}{2x}}\left(4-e^{\frac{-1}{2x}}\right)$

ثم إستنتج رتابة F و ضع جدول تغيراتها .

5)– أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

إنتهى الموضوع .

⇦ **تمرين إضافي** : $(02pts)$

1)– حدد المجموعة (Σ) للنقط $M(z)$ من (P) بحيث : $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^2\in\mathbb{R}$.

2)– ليكن $a\in\mathbb{C}^*$ ، حدد المجموعة (Π) للنقط $M(z)$ بحيث : $\arg(z+a)\equiv\arg(z)+\arg(a)[\pi]$.

abouzakariya@yahoo.fr