المجمع التربوي علال عواد بطانة – سلا	فرض محروس رقم 3: بتاريخ: 22-12-2016	المستوى: الثانية علوم رياضية الأستاذ: م. ادير

التمرين الأول (12ن)

الجزء الأول (2ن)

1- بين أن: $\forall x\in]0,+\infty[,\quad x-\ln x>0$.

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب : $g(x)=x(1+(x-\ln x)^2)$

أ- بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad g'(x)=(2x-1-\ln x)^2+x(2-x)$

ب- استنتج أن : $\forall x\in \left]\frac{1}{2},1\right[,\ g(x)>g(\frac{1}{2})$.

الجزء الثاني (6ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\pi}{2}-Arc\tan(x-\ln x)\ ,\ x>0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=e^{\frac{-1}{x}}\sqrt{x^2-2x}\quad ,\quad x<0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (1ن)

2- ادرس اتصال الدالة f في العدد 0 . (1ن)

3- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 و اول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4- ا - بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{1-x}{g(x)}$.

ب - باستعمال السؤال (ب) من الجزء الأول بين ان : $\forall x\in \left]\frac{1}{2},1\right[,|f'(x)|\le\frac{4}{5}$

ج – حدد $f'(x)$ لكل x من $]-\infty,0[$.

د – ادرس اشارة $f'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$ ثم اعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

5- بين ان : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=2$ و اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

6- انشيء (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجزء الثالث (4ن)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ب : $h(x)=f(x)-x$

1- أ - بين أن: $\forall x\in \left]\frac{1}{2},1\right[,h'(x)=\frac{1-2x-x(x-\ln x)^2}{g(x)}$

ب – استنتج أن : $\forall x\in \left]\frac{1}{2},1\right[,h'(x)<0$

2- استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$. $\left(Arc\tan(\frac{1}{0,5+\ln 2})\simeq 0,69\right)$

3- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة ب : $u_0=a$ حيث $a\in\left]\frac{1}{2},1\right[-\{\alpha\}$

و $u_{n+1}=Arc\tan(\frac{1}{u_n-\ln(u_n)})$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N},u_n\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

ت- حدد نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمرين الثاني: (5ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة g_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln x$

1- أ – حدد نهايتي g_n عند محدي المجال $]0,+\infty[$.

ب –ادرس رتابة g_n على المجال $]0,+\infty[$.

2- أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$.

ب – بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 \le a_n < e^2$

ج – بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \ln(a_n)=2-\frac{2}{n}a_n$

3- أ - عبر عن $g_{n+1}(a_n)$ بدلالة n و a_n .

ب – استنتج أن المتتالية العددية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا .

4- أ - – بين أن المتتالية العددية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

ب – حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(a_n)$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

التمرين الثالث : (3ن)

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

1- $f(x)=\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ، $\mathrm{I}=]1,+\infty[$

2- $f(x)=x\cos x$ ، $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

3- $f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}+2x\sqrt[3]{x-1}$ ، $\mathrm{I}=]1,+\infty[$

التمرين الإضافي : (2ن)

1- ليكن z عدد عقدي بحيث $|z|=1$. بين أن : $|z+1|\ge 1$ او $|1+z^2|\ge 1$

2- ليكن a و b عددين عقديين بحيث $|a|=|b|=1$ و $a\ne b$ و z عدد عقدي

بين أن : $\mathrm{Re}\left(\frac{z+ab\bar{z}-a+b}{a-b}\right)=-1$