تصحيح الامتحان الوطني 09 / 06 / 2010
➢ شعبة العلوم التجريبية بمسالكها
➢ شعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

من اقتراح : ذ. محمد أسويدي

التمرين الأول

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط: $A(-1,0,3)$ و $B(3,0,0)$ و $C(7,1,-3)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$.

1 . لنبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(4,0,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(8,1,-6)$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 4 & 8\\ \vec{j} & 0 & 1\\ \vec{k} & -3 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}-(-24+24)\vec{j}+4\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$

✓ تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

- لدينا A و B و C نقط غير مستقيمية (إما باستعمال المحددات المستخرجة للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و إما بملاحظة أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$) .
- حسب تعريف الجداء المتجهي ؛ لدينا حامل المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ عمودي على المستوى (ABC) ومنه المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3,0,4)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) . إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $3x+0y+4z+d=0$ حيث d من $\mathbb{R}$
وبما أن $A(-1,0,3)$ تنتمي إلى (ABC) فإن : $3\times(-1)+0+4\times3+d=0$ أي : $d=-9$
وبالتالي : $3x+4z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

✍ طريقة ثانية

- نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3,0,4)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC).
- لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\times3+y\times0+(z-3)\times4=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4z-9=0$$

إذن : $(ABC):3x+4z-9=0$

2. تحديد مركز وشعاع الفلكة (S)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2.3.x+9-9+y^2-2.1.y+1-1+z^2-15=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+z^2-25=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=5^2$$

إذن: (S) فلكة مركزها: $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها $R=5$

3. ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC)

أ- تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

لدينا: (Δ) عمودي على المستوى (ABC)؛ إذن فالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3,0,4)$ متجهة موجهة له.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\exists t\in\mathbb{R}) / \overrightarrow{\Omega M}=t.\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (\exists t\in\mathbb{R}) / \begin{cases} x=3+3t \\ y=1+0\times t \\ z=0+4t \end{cases}$$

إذن النظمة:

$$\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$$

هي تمثيلا بارامتري لـ (Δ)

ب- تحديد تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S).

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta)\cap(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \\ x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0 \end{cases}$$

ومنه: $(3+3t)^2+1+(4t)^2-6(3+3t)-2\times1-15=0$

أي: $9t^2+18t+9+1+16t^2-18-18t-2-15=0$. أي: $25t^2-25=0$ ومنه $t=\pm1$

في حالة $t=1$ نجد:

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

وفي حالة $t=-1$ نجد:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=-4 \end{cases}$$

إذن: المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين: $E(6,1,4)$ و $F(0,1,-4)$

التمرين الثاني

1 . لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

مميز المعادلة $z^2-6z+10=0$ هو : $\Delta=b^2-4ac$ حيث : $a=1$ و $b=-6$ و $c=10$

إذن : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times10=39-40=-4$. وبالتالي للمعادلة المقترحة حلين عقدين مترافقين :

$$z_1=\frac{6-i\sqrt{4}}{2}=3-i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+i\sqrt{4}}{2}=3+i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{3-i;3+i\}$$

2. نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ؛ النقط : A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-i$ و $b=3+i$ و $C=7-3i$.

✓ نعتبر الدوران R الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

✓ ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R .

تذكير

• z عدد عقدي معياره r وعمدته θ ؛ لدينا : $z=re^{i\theta}$ • $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^* \ : \ \arg(i\alpha)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

• $R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM=AM' \\ (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ • $AM=AM' \Leftrightarrow |z-a|=|z'-a|$

• $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv agr\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

أ ـ لنبين أن : $z'=iz+2-4i$

لدينا :

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM=AM' \\ (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-a|=|z'-a| \\ agr\left(\frac{z'-a}{z-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-a}{z-a}\right|=1 \\ agr\left(\frac{z'-a}{z-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

ومنه : $\frac{z'-a}{z-a}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$. أي : $z'=i(z-a)+a$ (لأن $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$)

أي : $z'=i(z-3+i)+3-i$ وبالتالي : $z'=iz-3i-1+3-i=iz+2-4i$

إذن : $z'=iz+2-4i$

ملاحظة

يمكن تطبيق خاصية الدرس مباشرة ؛ والخاصية هي كالتالي :

خاصية

R دوران مركزه Ω وزاويته α. M و M' نقطتان من المستوى. ω و z و z' ألحاق Ω و M و M' على التوالي: $R(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$

ب- لنتحقق أن لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هي $c'=5+3i$

لدينا: $R(C)=C'$ يعني: $c'=ic+2-4i=i(7-3i)+2-4i=7i-4i+3+2=5+3i$

إذن: $\boxed{c'=5+3i}$

ج- لنبين أن: $\dfrac{c'-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}i$

لدينا: $$\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}=\frac{2+2i}{4-4i}=\frac{1+i}{2-2i}=\frac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{4i}{8}=\frac{1}{2}i$$

إذن: $\dfrac{c'-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}i$

➢ لنستنتج أن BCC' مثلث قائم الزاوية في B وأن BC = 2BC'.

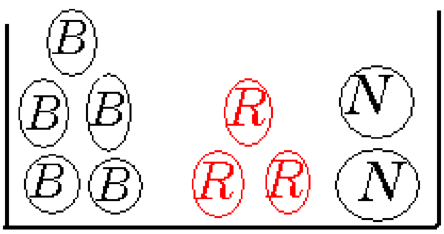
لدينا: $$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'})\equiv \arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{1}{2}i\right)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

إذن: $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه المثلث BCC' قائم الزاوية في B

➢ لدينا: $\dfrac{c'-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}i$ ومنه: $\left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right|=\dfrac{1}{2}$ أي: $\dfrac{|c'-b|}{|c-b|}=\dfrac{1}{2}$ أي: $\dfrac{BC'}{BC}=\dfrac{1}{2}$. إذن: $BC=2BC'$

التمرين الثالث



يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين (لايمكن التمييز بينها باللمس)

➢ نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق

1. نعتبر الحدثين:

الحدث A: "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط" RXXX مع X يعني كرة بيضاء أو سوداء

الحدث B: "الحصول على كرة بيضاء على الأقل" BXXX أو BBXX أو BBBX أو BBBB مع $(X=R$ أو $X=N)$

✓ لنبين أن: $P(A)=\dfrac{1}{2}$ و $P(B)=\dfrac{41}{42}$

الكرات لايمكن التمييز بينها باللمس إذن هناك فرضية تساوي الاحتمالات

ليكن Ω كون الإمكانيات: بما أن السحب في آن واحد فإن كل سحبة فهي تأليفة لأربعة عناصر من بين 10

إذن: $$card(\Omega)=C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\times 6!}=\frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{4\times3\times2\times1\times\cancel{6!}}=210$$

✓ لدينا: $card(A)=C_3^1\times C_7^3=105$

وبالتالي : $P(A)=\dfrac{105}{210}=\dfrac{1}{2}$

✓ ولدينا : $card(B)=\underbrace{C_5^1\times C_5^3}_{BXXX}+\underbrace{C_5^2\times C_5^2}_{BBXX}+\underbrace{C_5^3\times C_5^1}_{BBBX}+\underbrace{C_5^4}_{BBBB}=50+100+50+5=205$

إذن : $P(B)=\dfrac{205}{210}=\dfrac{41\times 5}{42\times 5}=\dfrac{41}{42}$

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ- تحديد قيم المتغير العشوائي X

الصندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء R وسبع كرات غير حمراء $\overline{R}$.

أثناء عملية السحب (التجربة العشوائية) ؛

إما تكون الكرات الأربع المسحوبة غير حمراء $\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$. في هذه الحالة قيمة X هي : 0

وإما أن تكون كرة واحدة حمراء والثلاث الأخريات غير حمراء $R\overline{R}\overline{R}\overline{R}$. في هذه الحالة قيمة X هي: 1

وإما أن تكون كرتين حمراوين وكرتين غير ذلك : $RR\overline{R}\overline{R}$ في هذه الحالة قيمة X هي: 2

وإما أن تكون ثلاث كرات حمراء وكرة غير حمراء $RRR\overline{R}$ في هذه الحالة قيمة X هي: 3

وهذه هي الحالات الممكنة لأن هناك ثلاث كرات حمراء فقط

إذن : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

ب- لنبين أن : $P(X=0)=\dfrac{1}{6}$ و $P(X=2)=\dfrac{3}{10}$

⊲ الحدث $(X=0)$ يعني أن جميع الكرات المسحوبة غير حمراء . إذن : $card(X=0)=C_7^4=35$

و بما أن : $card(\Omega)=C_{10}^4=210$ فإن : $P(X=0)=\dfrac{35}{210}=\dfrac{35\times 1}{35\times 6}=\dfrac{1}{6}$

إذن : $P(X=0)=\dfrac{1}{6}$

⊲ الحدث $(X=2)$ يعني أن كرتين حمراوين وكرتين غير حمراوين $RR\overline{R}\overline{R}$.

إذن : $card(X=2)=C_3^2\times C_7^2=3\times 21=63$

و بما أن : $card(\Omega)=C_{10}^4=210$ فإن : $P(X=2)=\dfrac{63}{210}=\dfrac{3\times 21}{10\times 21}=\dfrac{3}{10}$

إذن : $P(X=2)=\dfrac{3}{10}$.

ج- تحددي قانون احتمال المتغير العشوائي X

لدينا : $P(X=0)=\dfrac{1}{6}$ و $P(X=2)=\dfrac{3}{10}$

⊲ الحدث $(X=1)$ يعني أن كرة واحدة حمراء وثلاث غير حمراء . إذن :

$card(X=1)=C_3^1\times C_7^3=3\times 35=105$

و بما أن : $card(\Omega)=C_{10}^4=210$ فإن : $P(X=1)=\dfrac{105}{210}=\dfrac{1}{2}$

(يمكن ملاحظة أن الحدث $(X=1)$ هو الحدث A الوارد في السؤال 1)

➢ الحدث $(X=3)$ يعني أن: ثلاث حمراء وواحدة غير حمراء . إذن :

$$card(X=3)=C_3^3\times C_7^1=1\times 7=7$$

و بما أن : $card(\Omega)=C_{10}^4=210$ فإن : $P(X=0)=\frac{7}{210}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول :

x_i	0	1	2	3	
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{35}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\sum_0^3 p_i=\frac{35}{210}+\frac{105}{210}+\frac{63}{210}+\frac{7}{210}=1$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n-1}{2u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n-1>0$.

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0-1=2-1=1>0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

✓ لتكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي نفترض أن : $u_n-1>0$ ونبين أن $u_{n+1}-1>0$ ؛

لدينا : $\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{3u_n-1-2u_n}{2u_n}=u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1$

حسب الافتراض ؛ لدينا من جهة : $u_n-1>0$. ومن جهة أخرى لدينا : $u_n>1>0$ ومنه $2u_n>0$

وبالتالي $\frac{u_n-1}{2u_n}>0$ إذن : $u_{n+1}-1>0$.

✓ حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n-1>0$

2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ ـ • لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

لتكن n من $\mathbb{N}$

لدينا : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}$ وحيث أن : $\frac{u_n-1}{2u_n}=u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1$

و $\frac{2u_n-1}{u_n}=\frac{3u_n-1-u_n}{u_n}=2u_{n+1}-1=\frac{\cancel{2}(3u_n-1)}{\cancel{2}u_n}-1$

فإن : $v_{n+1}=\frac{u_n-1}{2\cancel{u_n}}\times\frac{\cancel{u_n}}{2u_n-1}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{2u_n-1}=\frac{1}{2}v_n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$. أي : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{3}$

♦ الاستنتاج

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=v_0\times(q)^n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب- ♦ لنبين $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$

لتكن n من $\mathbb{N}$

لدينا :
$$v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}\Rightarrow v_n(2u_n-1)=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-v_n=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-u_n=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n(2v_n-1)=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$$
(لأن $v_n\neq\frac{1}{2}$ تأكد من ذلك ....)

إذن : $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$

♦ النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا : $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ يعني :
$$u_n=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$$

وبما أن : $0<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{-1}=1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

3. نعتبر المتتالية $w_n=\ln(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ والدالة : ln متصلة في : $\ell=1$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln(1)=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

التمرين الرابع

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$

1. تحديد $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

تذكير : $(u+v)'=u'+v'$ و $(u.v)'=u'.v+u.v'$ و $(e^u)'=u'e^u$

ليكن x من $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\left(1+4xe^{2x}\right)'=(1)'+\left(4xe^{2x}\right)'=4e^{2x}+4x\times 2e^{2x}=4(2x+1)e^{2x}$$

إذن : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

2. رتابة الدالة g

✓ ليكن x من $\mathbb{R}$

➢
$$x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 4(2x+1)e^{2x}\geq 0 \quad \left(\text{لأن } \forall u\in\mathbb{R}; e^{u}>0\right)$$
$$\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$$

إذن الدالة g تزايدية على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

➢
$$x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x+1\leq 0$$
$$\Leftrightarrow 4(2x+1)e^{2x}\leq 0 \quad \left(\text{لأن } \forall u\in\mathbb{R}; e^{u}>0\right)$$
$$\Leftrightarrow g'(x)\leq 0$$

إذن الدالة g تناقصية على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

3. أ ـ لنحسب $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

لدينا : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1+4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$. إذن : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$

➢ نعلم أن : $e>2$ $(e\simeq 2.718281828....)$ أي : $e-2>0$

ولدينا : $1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}$ إذن : $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

ب ـ الاستنتاج

لدينا : $\mathbb{R}=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ إذن : $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \text{ أو } x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$

➢ إذا كان : $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

$x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow \underbrace{g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)}_{(\text{g تناقصية})}$ وبما أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$ فإن : $g(x)>0$

➢ إذا كان : $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\underbrace{g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)}_{(\text{g تزايدية})} \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ وبما أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$ فإن : $g(x)>0$

إذن : $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II . لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm\right)$

1. حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

➢ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x-1)e^{2x}+x+1\right)$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. [لأن $(+\infty)\times(+\infty)+(+\infty)=+\infty$]

➢ لدينا : $(2x-1)e^{2x}=(2x-1)e^{2x-1}\times e$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=e\times\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{2x-1}=e\times 0=0$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. حساب مشتقة الدالة f

ليكن x من $\mathbb{R}$.

لدينا :
$$\begin{aligned} f'(x)&=\left((2x-1)e^{2x}+x+1\right)' \\ &=2e^{2x}+2\times(2x-1)e^{2x}+1 \\ &=1+4xe^{2x} \\ &=g(x)\end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

➢ الاستنتاج

✓ لدينا : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ وحسب نتيجة السؤال (3.ب) لدينا : $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f'(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$. وبالتالي f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

.3

أ- حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

✓ لدينا : $\frac{f(x)}{x}=\frac{(2x-1)e^{2x}+x+1}{x}=2(2x-1)\cdot\frac{e^{2x}}{2x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)$

✓ وحيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}2\cdot(2x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ $\quad$ [لأن $(+\infty)\times(+\infty)+1=+\infty$]

➢ الاستنتاج

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن : $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب (الموجبة) .

ب- حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

✓ لدينا :
$$\begin{aligned} f(x)-(x+1) &= (2x-1)e^{2x}+x+1-(x+1)\\ &=(2x-1)e^{2x}\\ &=(2x-1)e^{2x-1}\times e \end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=e\times\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x-1}=0$ $\quad$ [لأن : $\lim\limits_{u\to-\infty}ue^{u}=0$]

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

➢ الاستنتاج :

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$. فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ج- زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=y$

✓
$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow (2x-1)e^{2x}+x+1=x+1\\ &\Leftrightarrow (2x-1)e^{2x}=0\\ &\Leftrightarrow (2x-1)=0 \qquad [\ \text{لأن}\ .\ \forall x\in\mathbb{R};e^{x}>0\ ]\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

إذن: (Δ) يقطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad$ (تأكد أن $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$) .

➢ دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

من أجل ذلك ندرس إشارة : $f(x)-y$. الجدول التالي يلخص ذلك :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
وضع $(\mathscr{C}_f)$ و (Δ)	$(\mathscr{C}_f)$ تحت المستقيم (Δ)	$A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $(\mathscr{C}_f)$ تقاطع و المستقيم (Δ)	$(\mathscr{C}_f)$ فوق المستقيم (Δ)

4 . أ ـ تحديد معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول 0 .

✓ لدينا معادلة المماس (T) في النقطة $O(0;0)$: $(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$

♦ بما أن : f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ كجداء ومجموع دوال قابلة للاشتقاق في $x_0=0$

$u: x \mapsto 2x-1$ و $v: x\mapsto e^{2x}$ و $w: x\mapsto x+1$ ولدينا : $f = u\cdot v + w$

فإن : $f'(0)=g(0)=1$.

♦ ولدينا : $f(0)=0$

إذن : $(T): y = x$

ب ـ تحديد نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

لدينا : $f''(x)=(f'(x))'=g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ومنه : $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(2\times\frac{-1}{2}+1\right)e^{2x}=0$

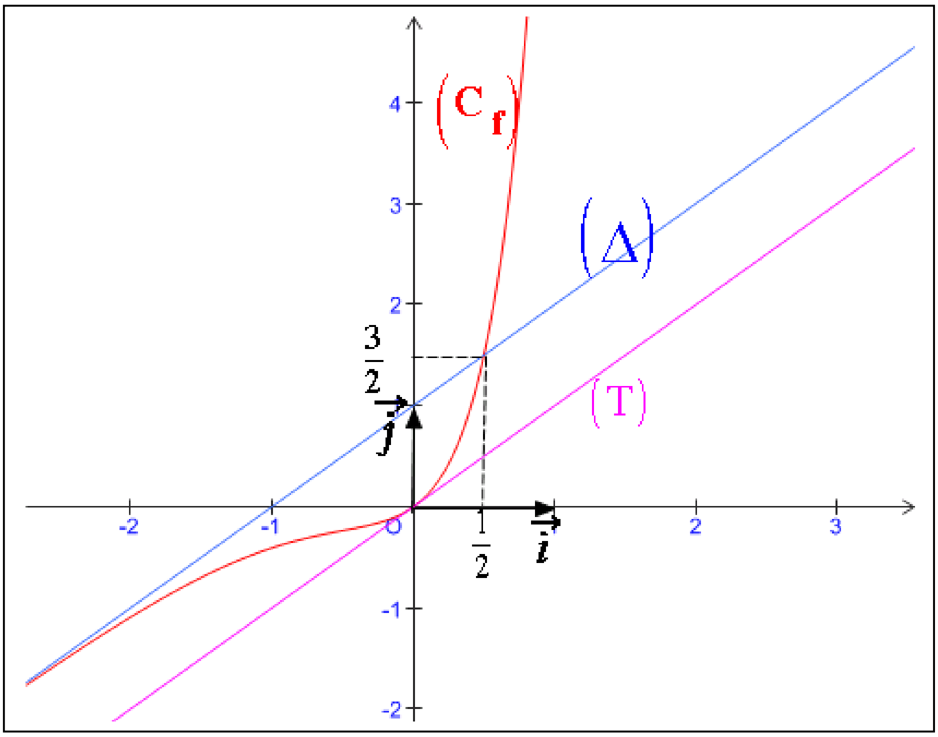
وحسب ما سبق (الجزء I) لدينا : $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[: g'(x)\geq 0$. أي : $\boxed{\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[: f''(x)\geq 0}$

و لدينا : $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] : g'(x)\leq 0$. أي : $\boxed{\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] : f''(x)\leq 0}$

إذن: المشتقة الثانية f'' ؛ للدالة f تنعدم في $x_1=-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها

ومنه $(\mathscr{C}_f)$ له نقطة انعطاف أفصولها $-\frac{1}{2}$

5. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) والمماس (T)



6. أ- حساب التكامل : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=2x-1 \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

وبالتالي :
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2\times\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)e^{2\times\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(2\times0-1)e^{2\times0}-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$$
$$=1-\frac{e}{2}$$

إذن : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

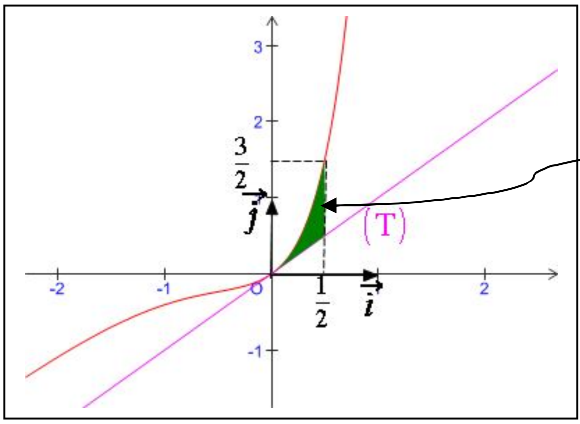
ب- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(T):y=x$ المماس للمنحنى ؛ والمستقيمين اللذين معادلتهما هما : $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{A}=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-x|dx\cdot\Big(\underbrace{\text{وحدة قياس المساحة}}_{ua}\Big)$$

لدينا :
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(2x-1)e^{2x}+1\right]dx\cdot u.a$$
$$=\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}1.dx\right].u.a \quad (\text{خطانية التكامل})$$
$$=\left(1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right).u.a \quad (\text{حسب نتيجة السؤال 6.أ})$$

حسب المعطيات : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ ومنه : $u.a=4cm^2$

وبالتالي : $\mathcal{A}=\left(\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\right)\times4cm^2=(6-2e)cm^2$



انتهى بحمد الله

سطات / 12 / 06 / 2010

على الساعة : 01h :35 min