تمرين 1 — الميكانيك في السينما

يريد مخرج سينمائي أن ينجز قفزة لفيلم، فاعتمد في تصوير هذه اللقطة على "رجل دمية" لإنجاز القفزة، حيث يتوجب على هذا الأخير القفز بسيارته سطح بناية (السطح الأفقي SI) مستعملا مقفز BOC (انظر الوثيقة).

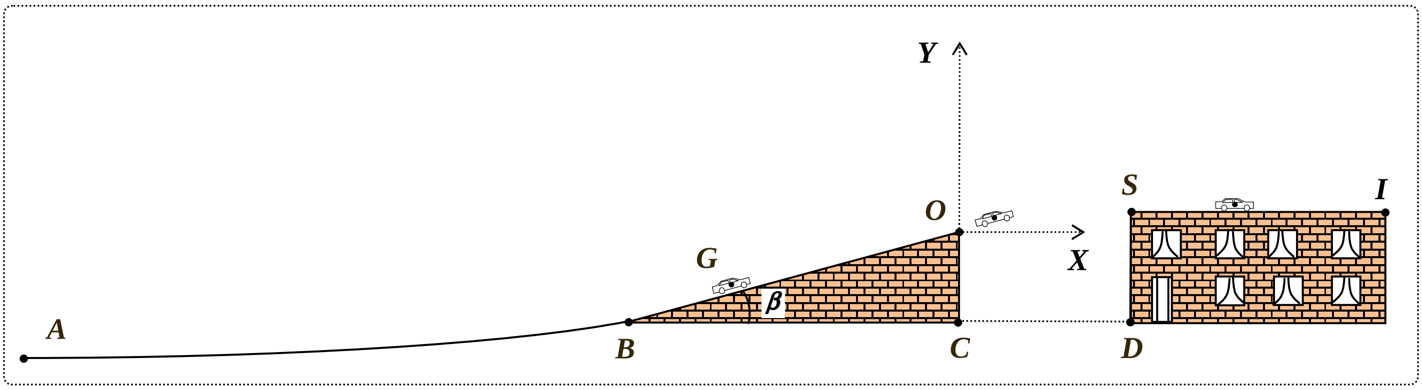
معطيات : $OC = 8m$ ؛ $SD = 10m$ ؛ $CD = 15m$ ؛ $SI = 20m$

الكتلة m للمجموعة {سيارة + رجل دمية} هي $m = 100kg$ و نأخذ $g = 9,81m.s^{-2}$

نذكر أن: $\sin(2a) = 2\sin(a).\cos(a)$ و ندرس حركة مركز قصور المجموعة {سيارة + رجل دمية} في المعلم الأرضي.

الإحتكاكات:

- مماثلة لقوة وحيدة لها نفس اتجاه الحركة و منحاها معاكس لمنحى متجهة السرعة و شدتها ثابتة $f = 500N$ خلال الحركة على سطح البناية.
- مهملة مع الهواء



المرحلة الأولى: القفزة على سطح المنزل

نقبل أنه عند أصل التواريخ $(t = 0)$ يغادر مركز قصور المجموعة النقطة O (أصل المعلم) بسرعة v_0 وأن مركز القصور منطبق مع النقطة S عند وصول المجموعة إلى سطح البناية.

1) أوجد في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المعادلات الزمنية للحركة $x = f(t)$ و $y = f(t)$ و معادلة المسار $y = f(x)$.

2) لتفادي الاصطدام بين السيارة و سطح المنزل يجب أن يصل مركز قصور المجموعة إلى النقطة S بسرعة أفقية.

1-2) ماهي قيمة v_y أرتوب متجهة السرعة عند الموضع S .

2-2) استنتج أن $x_S = \dfrac{v_0^2.\sin(2\beta)}{2.g}$ و $y_S = \dfrac{v_0^2.\sin^2(\beta)}{2.g}$

3-2) ماذا تمثل كل من $X = 2.x_S$ و $Y = y_S$ بالنسبة لقذيفة في مجال الثقالة؟

4-2) عبر عن $\dfrac{y_S}{x_S}$ بدلالة الزاوية β ، ثم استنتج قيمة β .

5-2) بين أن السرعة عند قمة المقفز BOC تساوي $v_0 = 24,3m.s^{-1}$.

6-2) تحقق من أن قيمة السرعة v_S عند وصول المجموعة إلى النقطة S هي : $v_S \approx 23,5m.s^{-1}$.

المرحلة الثانية: الحركة على سطح المنزل

يمكن التحكم عن بعد في "الرجل الدمية" من توقيف المحرك والضغط على دواسة الفرامل مباشرة بعد نزول السيارة على سطح البناية. نعتبر أن قوى الاحتكاكات الناتجة عن الفرملة مكافئة لقوة وحيدة $\vec{F}$ شدتها ثابتة.

1) بتطبيقك للقانون الثاني لنيوتن على حركة مركز قصور المجموعة {سيارة + رجل دمية} فوق سطح البناية، أوجد، في المعلم $(S,\vec{i})$ المعادلتين الزمنيتين لكل من السرعة $v_x(t)$ و الأفصول $x(t)$ لمركز قصور المجموعة باعتبار لحظة وصول المجموعة إلى الموضع S أصلا جديدا للتواريخ.

2) استنتج القيمة الدنيا لقوة الكبح كي تتوقف المجموعة قبل وصولها الحافة الأخرى للبناية، نهمل أبعاد السيارة أمام المسافة SI .

الأجوبة

المرحلة الأولى: القفزة على سطح المنزل

1) أوجد في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المعادلات الزمنية للحركة $x=f(t)$ و $y=f(t)$ و معادلة المسار $y=f(x)$.

المجموعة المدروسة {السيار + رجل دمية}

القوى الخارجية:

$\vec{P}$ وزن المجموعة {السيارة + رجل دمية}

نطبق القانون الثاني لنيوتن على حركة مركز القصور G للمجموعة {السيارة + رجل دمية} بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المرتبط بالأرض و الذي نعتبره غاليليا:

$\sum \vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$ أي $\vec{P}=m.\vec{a}_G$ مع $\vec{P}=m.\vec{g}$.

و بالتالي: $\vec{a}_G=\vec{g}$.

الإسقاط على محاور المعلم:

الإسقاط على (Ox) : $a_x=0$

و بما أن $a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=0$ فإن $v_x=v_{0x}$

نحدد v_{0x} بالشروط البدئية:

عند $t=0$ لدينا $v_{0x}=v_0.\cos(\beta)$

و منه $\boxed{v_x=v_0.\cos(\beta)}$

وبما أن $v_x=\dfrac{dx}{dt}$ فإن $x=v_0.\cos(\beta).t+x_0$

نحدد x_0 بالشروط البدئية: $x_0=0$.

وبالتالي: $x(t)=v_0.\cos(\beta).t$

الإسقاط على (Oy) :

$a_y=-g$ و بما أن $a_y=\dfrac{dv_y}{dt}$ فإن $v_y=-g.t+v_{0y}$

نحدد v_{0y} بالشروط البدئية:

عند $t=0$ لدينا $v_{0y}=v_0.\sin(\beta)$.

ومنه $\boxed{v_y=-g.t+v_0.\sin(\beta)}$

وبما أن $v_y=\dfrac{dy}{dt}$

فإن $y=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_0.\sin(\beta).t+y_0$

مع $y_0=0$

أي: $y=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_0.\sin(\beta).t$

ومنه المعادلات الزمنية هي:

$$\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases}x(t)=v_0\cos(\beta).t\\ y(t)=-\dfrac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin(\beta).t\end{cases}}$$

نحصل على معادلة المسار بإقصاء الزمن بين المعادلتين الزمنيتين:

لدينا: $t=\dfrac{x}{v_0.\cos(\beta)}$

ومنه:

$$y=-\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.\cos(\beta)}\right)^2+v_0.\sin(\beta).\frac{x}{\cos(\beta)}$$

ومنه معادلة المسار هي:

$$\boxed{y=-\frac{g}{2.v_0^2.\cos^2(\beta)}.x^2+x.\tan(\beta)}$$

2) لتفادي الاصطدام بين السيارة و سطح المنزل يجب أن يصل مركز قصور المجموعة إلى النقطة S بسرعة أفقية.

1-2) ماهي قيمة v_y أرتوب متجهة السرعة عند الموضع S .

عندما تكون متجهة السرعة أفقية يكون أرتوبها منعدم: عند S تكون: $v_y=0$

2-2) استنتج أن $x_S=\dfrac{v_0^2.\sin(2\beta)}{2.g}$ و $y_S=\dfrac{v_0^2.\sin^2(\beta)}{2.g}$

لدينا عند S : $-g.t+v_0.\sin(\beta)=0$

أي $t_S=\dfrac{v_0.\sin(\beta)}{g}$

نعوض في المعادلات الزمنية للأفصول $x(t)$:

$$x_S=v_0.\cos(\beta).\frac{v_0.\sin(\beta)}{g}$$

أي: $\boxed{x_S=\dfrac{v_0^2.\sin(2\beta)}{2g}}$

نعوض في المعادلة الزمنية للأرتوب $y(t)$:

$$y_S=-\frac{1}{2}g.\left(\frac{v_0.\sin(\beta)}{g}\right)^2+v_0.\sin(\beta).\frac{v_0.\sin(\beta)}{g}$$

ومنه: $\boxed{y_S=\dfrac{v_0^2.\sin^2(\beta)}{2g}}$

3-2) ماذا تمثل كل من $X = 2.x_S$ و $Y = y_S$ بالنسبة لقذيفة في مجال الثقالة؟

X : يمثل المدى — Y يمثل أرتوب قمة مسار مركز قصور المجموعة {السيار + رجل دمية}

4-2) عبر عن $\frac{y_S}{x_S}$ بدلالة الزاوية β، ثم استنتج قيمة β.

لدينا: $y_S = \frac{v_0^2.\sin^2(\beta)}{2g}$ و $x_S = \frac{v_0^2.\sin(2\beta)}{2g}$ ومنه

$\frac{y_S}{x_S} = \frac{\sin^2(\beta)}{\sin(2\beta)}$ و بما أن $\sin(2\beta) = 2\sin(\beta).\cos(\beta)$

فإن: $\frac{y_S}{x_S} = \frac{1}{2}\tan(\beta)$

حساب قيمة β لدينا: $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2y_S}{x_S}\right)$

و بما أن $y_S = SD - OC = 2m$ و $x_S = 15m$

فإن $\beta \approx 15°$.

5-2) بين أن السرعة عند قمة المقفز BOC تساوي $v_0 = 24,3m.s^{-1}$.

لدينا $y_S = \frac{v_0^2.\sin^2(\beta)}{2g}$ ومنه $v_0 = \sqrt{\frac{2.g.y_S}{\sin^2(\beta)}}$ تطبيق عددي: $v_0 = 24,3m.s^{-1}$

6-2) تحقق من أن قيمة السرعة v_S عند وصول المجموعة إلى النقطة S هي : $v_S \approx 23,5m.s^{-1}$.

لدينا عند النقطة S : $v_y = 0$ و $v_x = v_0.\cos(\beta)$ و لدينا $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$

تطبيق عددي: $v_S = 23,5m.s^{-1}$

المرحلة الثانية: الحركة على سطح المنزل

1) بتطبيقك للقانون الثاني لنيوتن على حركة مركز قصور المجموعة {سيارة + رجل دمية} فوق سطح البناية، أوجد، في المعلم $(S,\vec{i})$ المعادلتين الزمنيتين لكل من السرعة $v_x(t)$ و الأفصول $x(t)$ لمركز قصور المجموعة باعتبار لحظة وصول المجموعة إلى الموضع S أصلا جديدا للتواريخ.

خلال حركتها على سطح البناية تخضع المجموعة {السيار + رجل دمية}لوزنها $\vec{P}$ و تأثير السطح $\vec{R}$ و قوة الاحتكاكات الناتجة عن الكبح $\vec{F}$.

حسب القنون الثاني لنيوتن لدينا: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$ إي

$\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_N + \vec{F} = m.\vec{a}_G$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور $(S,\vec{i})$ نجد:

$-f - F = m.a_x$ أي $a_x = -\frac{f+F}{m}$

ومنه: $v_x(0) = v_S$; $v_x(t) = -\frac{f+F}{m}.t + v_x(0)$ و

بالتالي: $x(t) = -\frac{f+F}{2m}.t^2 + v_S.t + x_0$; $x_0 = 0$

2) استنتج القيمة الدنيا لقوة الكبح كي تتوقف المجموعة قبل وصولها الحافة الأخرى للبناية، نهمل أبعاد السيارة أمام المسافة SI.

القيمة الدنيا لقوة الكبح هي القيمة تجعل المجموعة {السيار + رجل دمية} تتوقف عند الموضع I أي

$$x_I = -\frac{f+F}{2.m}.t_I^2 + v_S.t_I = SI \quad :(1)$$

و

$$v_I = -\frac{f+F}{m}.t + v_S = 0 \quad :(2)$$

و منه: $t_I = \frac{v_S.m}{f+F}$

نعوض في المعادلة (1):

$$SI = -\frac{f+F}{2.m}.\left(\frac{v_S.m}{f+F}\right)^2 + v_S.\left(\frac{v_S.m}{f+F}\right)$$

أي

$$SI = \frac{v_S^2.m}{2.(f+F)}$$

و منه:

$$F = \frac{v_S^2.m}{2.SI} - f$$

تطبيق عددي: $F = 880,6N$