ثانوية بئر أنزران . صفرو .
2012/2011 (الدّورة 1)

الاشتقاق و دراسة دوال عددية

2 بكالوريا: اقتصاد1- محاسبة1
ذ: توفيق بنعمرو

015

أحسب مشتقّات الدوال التّالية:

$a(x)=6x^8-\dfrac{3}{14}x^7+\sqrt{5}\,x^4+1$ ، $b(x)=x^4-(4{,}1)x^2+3x+2$

$c(x)=\dfrac{2x^2+5x}{x^3+3}$ ، $d(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2+4x}+2011$

$e(x)=(x^5+1)^2(5x+1)$ ، $f(x)=\sqrt{8x^3-4x^2+4}$

$g(x)=(x-\dfrac{1}{x})^{2012}$ ، $h(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+3}$

---

016 $f(x)=3x^2-4x+8$

1) حدّد معادلة مماس C_f في $A(1\,,7)$.

2) حدّد الدالة التّآلفية مماسّة C_f في $B(2\,,12)$.

3) بيّن أنّ C_f يقبل مطرافاً في $\dfrac{2}{3}$.

---

017 $x\in[3\,,+\infty[$ ، $f(x)=4-x\sqrt{x-3}$

1) أدرس اشتقاق f في 3 على اليمين و أعط تأويلاً هندسياً.

2) بيّن أنّ $f'(x)=\dfrac{-3x+6}{2\sqrt{x-3}}$ ، $x>3$.

3) بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية على مجالٍ J يتمّ تحديده

4) أحسب $f(4)$ و أحسب $(f^{-1})'(0)$.

---

018 لتكن $f(x)=|x^2-25|$

1) أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في 5

2) هل f قابلة للاشتقاق في العدد 5 ؟

3) حدّد معادلتي نصفي المماس ل (C_f) في 5

---

019 لتكن $f(x)=\dfrac{6x+1}{2x-4}$; $x\in]2,+\infty[$

1) أحسب $f'(x)$ و بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية على مجالٍ J يتمّ تحديده.

2) حلّ في I المعادلة: $f(x)=\dfrac{19}{2}$ و أحسب $(f^{-1})'(\dfrac{19}{2})$.

---

020 نعتبر الدالة f بحيث:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} & x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & x\geq 0 \end{cases}$$

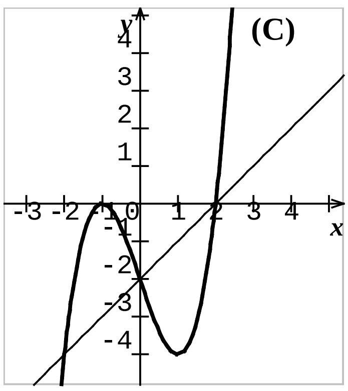
1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثمّ تحقّق أن f متّصلة في 0 .

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و اليسار في 0 ثمّ أوّل النّتيجة.

3) أحسب $f'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

---

021 (بكالوريا وطنية 2007 / 2008 د ع) (C) التمثيل المبياني لدالة g معرّفة على $[-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}]$



1) حدّد إشارة g على $[-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}]$

2) حدّد القيمة الدنوية النسبية والقيمة القصوى النسبية للدالة g

3) حدّد تقاطع (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-2$.

4) حلّ في $[-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}]$ المتراجحة $g(x)\geq x-2$.

---

024 (فرض منزلي 2008/ 2009) لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x+3-\dfrac{4}{x^2}$

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم $y=x+3$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) أنشر $(x-1)(x^2+4x+4)$ و حدّد تقاطع C_f و محور الأفاصل ثمّ أنشئ C_f

5) ناقش مبيانياً عدد حلول المعادلة: $x^3-(m-3)x^2-4=0$ حيث m بارمتر حقيقي.

6) لتكن g قصور f على $]-2\,;0[$.

أ) بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال I يجب تحديده ثمّ أنشئ $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم.

ب) أحسب $g(-1)$ و استنتج $(g^{-1})'(-2)$.

---

022 (فرض منزلي 2009/2010) لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+8}{x^2}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم $y=2x-5$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{(2x-4)(x^2+2x+4)}{x^3}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[-2,-1]$.

5) أحسب $f(1)$ ثمّ أنشئ C_f .

6) لتكن g قصور f على $]0\,,2]$.

أ) بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال I يجب تحديده ثمّ أنشئ $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم.

ب) أحسب: $(g^{-1})'(5)$.

---

023 f دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ و قابلة للاشتقاق عليه بحيث جدول التغيرات هو:

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1) حدّد حلول المعادلة $f(x)=0$.

2) حدّد حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$. (بكالوريا وطنية 2007 / 2008 د س)

3) حدّد صورة المجال $]0\,,2]$ بالدالة f .

---

025 لتكن f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بحيث: $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{2x}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4) حدّد معادلة المستقيم (T) مماس C_f في 1 ثمّ أنشئ (Δ) و (T) و C_f .

5) لتكن g المعرّفة على $I=[\,0{,}5\,;+\infty\,[$ ب $g(x)=f(x)$. (مكناس 2000 / 2001)

بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد $g^{-1}(x)$ لكلّ x من J .

بالتوفيق

ثانوية بئر أنزران . صفرو .
2012/2011 (الدّورة 1)

الاشتقاق و دراسة الدوال (تتمّة)

2 بكالوريا: اقتصاد1− محاسبة1
ذ: توفيق بنعمرو

026

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x^2\sqrt{2x+5}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. **(مكناس 2000 / 2001)**

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0=-2{,}5$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب $f^{/}(x)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيرّات.

4) أدرس الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$ و أنشئ C_f .

5) ناقش مبيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة $2x^5+5x^4-m^2=0$: $x\in[-\frac{5}{2},+\infty[$.

027 **(فرض منزلي 2009 / 2010)**

نعتبر الدالة $f(x)=x-4\sqrt{x+6}+9$ حيث $x\in[-6\,,+\infty[$.

1) أحسب $f(-5)$ و $f(3)$ و $f(10)$ ثمّ أدرس اتصال f على $]-6\,,+\infty[$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أدرس الفرع اللانّهائي ل C_f جوار $+\infty$.

3) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في (-6) و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

4) أ) بيّن أنّ $x>-6;\ f^{/}(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{x+6}}$ و أدرس إشارة $f^{/}(x)$ و ضع جدول التغيرّات

ب) أنشئ C_f .

5) أ) تحقّق أنّ g قصور f على $[-6\,,-2]$ تقبل دالة عكسية g^{-1} على مجال J يتمّ تحديده

ب) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} . **ج)** أحسب $(g^{-1})^{/}(0)$.

6) أنشر: $(\sqrt{x+6}-2)^2-1$ ثمّ حدّد صيغة $g^{-1}(x)$ لكلّ x من J .

028

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=x(\sqrt{x}-2)^2$

1) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و اليسار في 0 .

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ أدرس الفرع اللانهائي ل C_f جوار $+\infty$.

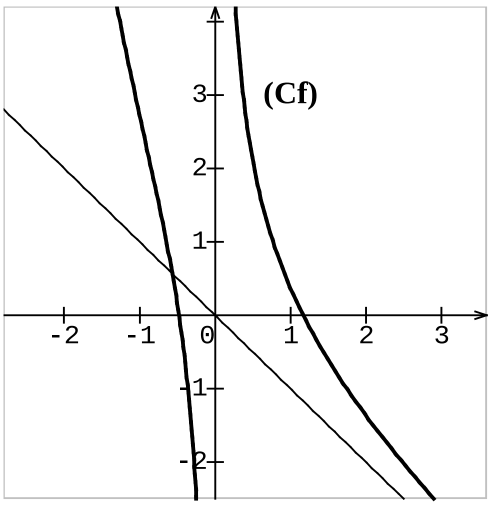
3) بيّن أنّ: $f^{/}(x)=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيرّات.

4) بيّن أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف ثمّ حدّ معادلة المماسّ له في هذه النّقطة.

5) أنشئ C_f .

6) لتكن g قصور f على $I=[4\,;+\infty[$. بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية g^{-1} محدّداً مجموعة تعريفها ثمّ أنشئ في نفس المعلم منحنى g^{-1}

029



f دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$.
و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.
C_f يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.
محور الأراتيب مقارباً عمودياً.
(Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$

1) حدّد $\lim\limits_{0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{+\infty} f(x)+x$

2) أعط جدول التغيرات.

3) أعط إشارة $f(x)+x$ على $]0\,,+\infty[$. **(بكالوريا وطنية 2008 / 2009 د ع)**

4) أعط عدد حلول المعادلة $f(x)=-x$ على $\mathbb{R}^*$.

030 **(فرض منزلي 2010 / 2011)**

نعتبر الدالة: $g(x)=2\sqrt{x+3}-x-1$; $x\in[-3\,,+\infty[$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و أدرس الفرع اللانّهائي ل C_g بجوار $+\infty$

2) أدرس قابلية اشتقاق g في (-3) على اليمين و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة

3) أ) بيّن أنّ: $g^{/}(x)=\dfrac{-x-2}{(1+\sqrt{x+3})\cdot\sqrt{x+3}}$ لكلّ $x>-3$

ب) أدرس إشارة $g^{/}(x)$ ثمّ ضع جدول التغيّرات.

4) حدّد نقطة تقاطع C_g مع محور الأفاصيل.

5) حدّد $g(1)$ ثمّ أنشئ C_g نأخذ: $g(0)\approx 2{,}5$ و $1+2\sqrt{3}\approx 4{,}5$

031

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

1) بيّن أنّ حيّز تعريف الدالة f هو $D=[0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$. **(مراكش 2000/1999)**

2) بيّن أنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و أوّل هندسياً النّتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}$ و أوّل هندسياً النّتيجة.

بالتوفيق

4) أ) أحسب $f^{/}(x)$ لكلّ x من $D-\{0\}$.

ب) بيّن أنّ: $\forall x\in D-\{0\}:\ f^{/}(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$ و حدّد جدول التغيرات.

5) أنشئ C_f ، نقبل أنّ $I(9,\frac{9}{2})$ نقطة انعطاف.

6) لتكن g قصور f على $J=[4,+\infty[$ ، بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية من J نحو J . و أنشئ منحنى الدالة $g^{-1}(x)$.

032

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. **(فاس 2001 / 2002)**

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{-\infty} f(x)=0$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ المستقيم $y=2x$ مقارب مائل ل C_f بجوار $+\infty$.

4) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

5) أحسب $f^{/}(x)$ و تحقّق أنّ $\forall x<-1:\ f^{/}(x)<0$ و $\forall x\in]1,+\infty[:\ f^{/}(x)>0$.

6) ضع جدول التغيّرات و أنشئ C_f .

7) لتكن g قصور f على $]-\infty,-1]$.بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يتمّ تحديده.

8) حدّد $g^{-1}(x)$ ثمّ أنشئ $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم و بلون مغاير.

033

أثبتت دراسة إحصائية أنّه يمكن التّعبير رياضياً عن تطوّر ساكنة مدينة منذ 1960 بالدالة $f(t)=\dfrac{3(t+10)^2}{t^2+400}$ ، حيث $f(t)$ عدد السكان بالملايين سنة $1960+t$.

نقبل أنّ وثيرة النموّ في اللحظة t يعبّر عنها ب $f^{/}(t)$.

1) في أية سنة تجاوزت ساكنة هذه المدينة 3 ملايين نسمة.

2) أحسب $f^{/}(t)$ ثمّ استنتج السنة التي تكون فيها ساكنة هذه المدينة قصوية وحدّد عدد السكان.

3) أحسب وثيرة النمو في سنة 1975 ثمّ وثيرة النمو المنتظرة سنة 2015.

4) أحسب $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ ثمّ أعط تأويلاً إحصائياً لهذه النّتيجة.