2علوم رياضية — مادة الرياضيات — اتصال دالة عددية

التمريـــن 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+1}-a}{\sqrt{x+2}-2}$ حيث عدد حقيقي.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب نهاية f عند $+\infty$.

2) بين أن f متصلة على D .

3) هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في 2 ؟

التمريـــن 2:

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(3-x)^n-a}{x-2} & ; \quad x\prec 2 \\ f(x)=\dfrac{b-nx}{\sqrt{x^2+5}} & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ حيث a و b من R

حدد a و b بحيث تكون f متصلة على R .

التمريـــن 3:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

1) حدد نهايات f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

2) بين أن f متصلة على R.

التمريـــن 4:

لتكن f دالة عددية معرفة ومتصلة على $[a,b]$ بحيث $f([a;b])\subset[a;b]$.

بين أن : $(\exists c\in\,]a;b[)\ :\ f(c)=c$

التمريـــن 5:

لتكن f و g دالتين متصلتين على R بحيث : $(\forall x\in R):\ f(x)\prec 1$

نفترض أن المعادلة $g(x)=x$ حلين حقيقيين α و β بحيث : $\alpha\prec 0\prec\beta$.

بين ان المعادلة $f(x)g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في R .

التمريـــن 6:

لتكن f دالة متصلة على R بحيث : $(\forall x\in R):\ f(x)\neq x$.

1) بين أن : « $(\forall x\in R): f(x)\prec x$ » أو « $(\forall x\in R): f(x)\succ x$ »

2) بين أن المعادلة $f(f(x))=x$ لا تقبل حلا في R .

التمريـــن 7:

نعتبر دالتين f و g متصلتين على $[a;b]$ بحيث : $(\forall x\in[a;b])\ :\ f(x)\succ g(x)$

أثبت وجود عدد حقيقي α بحيث : $(\forall x\in[a;b]): f(x)\succ g(x)+\alpha$

التمريـــن 8:

لتكن f دالة عددية متصلة على R حيث : $(\forall x\in R)\ :\ f(x)\neq x$.

بين ان المعادلة $f\circ f(x)=x$ لا تقبل حلا في R .

التمريـــن 9:

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)=f(b)$.

بين أن المعادلة $f(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$.

التمريـــن 10:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة ومتصلة على R^+ حيث :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\prec 1$ و $f(x)\succ 0$ لكل x من R^+

1) نفترض أن $f(x)\leq x$ لكل x من $]0,+\infty[$. بين أن $f(0)\leq 0$ ثم استنتج وجود عدد α من $]0,+\infty[$ حيث: $f(\alpha)\succ\alpha$

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$ ثم استنتج وجود عدد β من R^+ حيث $f(\beta)\prec\beta$.

3) استنتج أن : $(\exists\gamma\in R^+)\ :\ f(\gamma)=\gamma$

التمريـــن 11:

لتكن f دالة عددية معرفة على R و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

1) نفترض أن : $(\forall x\in R)\ :\ f\left(x+\frac{1}{n}\right)\succ f(x)$.

أ.بين أن : $(\forall k\in N^*)\ (\forall x\in R)\ \ f\left(x+\frac{k}{n}\right)\succ f(x)$.

ب.استنتج أن $f(1)\succ f(0)$.

2) نفترض أن : $f(1)=f(0)$ و أن f متصلة على R. بين أن $(\exists\alpha\in R):\ f\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)=f(\alpha)$.

التمريـــن 12:

ليكن a و b عددين حقيقيين .لتكن f دالة عددية معرفة على $[a,b]$ بحيث :

$f([a;b])\subset[a;b]$.

$|f(x)-f(y)|\prec|x-y|$. لكل x و y من $[a,b]$.

1) بين أن f متصلة على $[a,b]$.

2) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-x$.

أ. بين أن g تناقصية قطعا على $[a,b]$.

ب. استنتج وجود عنصر وحيد α من $[a,b]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$.

http://www.vrac-coloriages.net

التمريـــن 13:

لتكن f دالة متصلة على مجال x_1 و x_2 و.... و x_n من $[a;b]$.

بين أن : $(\exists c\in[a,b])\ ;\ f(c)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+..+f(x_n))$

تقديم : ذ.العربي الوظيفي

التمريـــن 14:

احسب مايلي :

$\arctan\left(\tan\frac{-26\pi}{5}\right)$ ، $\arctan\left(\tan\frac{23\pi}{3}\right)$ ، $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\tan\left(\arctan 13\pi\right)$ ، $\cos\left(\tan\left(\arctan\frac{38}{4}\pi\right)\right)$

التمريـــن 15:

1) بين أن $\arctan\frac{4}{3}=2\arctan\frac{1}{2}$

2) حدد قيمة العدد $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

التمريـــن 16:

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $ab \prec 1$.

1) بين أن : $-\frac{\pi}{2}\prec\arctan(a)+\arctan(b)\prec\frac{\pi}{2}$.

2) بين ان : $\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\frac{a+b}{1-ab}$

3) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

التمريـــن 17:

ليكن a عددا حقيقيا و b عددا حقيقيا موجبا .

1) بين أن $|\arctan a|=\arctan|a|$

2) بين ان $\arctan(a-b)\leq\arctan(a)+\arctan(b)$

التمريـــن 18:

بين ان لكل x من R : $\sin(Arc\tan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

التمريـــن 19:

1) ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . بين أن : $\arctan(x+1)-\arctan x=\arctan\frac{1}{x^2+x+1}$

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}$

التمريـــن 20:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=Arc\tan x-\frac{1}{Arc\tan x}$

1) حدد حيز تعريف الدالة f وتحقق أنها دالة فردية .

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات حيز تعريفها .

3) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,+\infty[$.

بين أن الدالة g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده ثم احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تقديم : ذ.العربي الوظيفي

التمريـــن 21:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\tan(x)-\frac{4}{\pi}x$ ونضع $\alpha=\arctan\left(\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\right)$.

1) بين أن $0\prec\alpha\prec\frac{\pi}{6}$.

2) اعط جدول تغيرات f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بدلالة α .

3) بين أن $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right):\ x\prec\tan x\prec\frac{4}{\pi}x$.

http://www.vrac-coloriages.net

التمريـــن 22:

1) نعتبر الدالة العددية u المعرفة على R بما يلي : $u(x)=x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

أ.أثبت أن $0\prec x+\sqrt{1+x^2}$ لكل x من R ثم احسب نهاية u عند كل من $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب.بين أن u تزايدية قطعا على R .

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي : $f(x)=\arctan(u(x))$

بين أن f تقابل من R نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

3) بين أن $f(1)=\frac{3\pi}{8}$

4) بين أن المعادلة $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;1[$.

التمريـــن 23:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $f(x)=\tan^2(x)-2\sqrt{3}\tan(x)$

1) اعط جدول تغيرات f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) بين ان f تقابل من $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

3) نضع : $\alpha=\arctan(2\sqrt{3})$ و $\beta=\arctan\left(\sqrt{\pi+3}+\sqrt{3}\right)$.

تحقق أن $\alpha\prec\beta$ ثم بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]\alpha;\beta[$.

التمريـــن 24:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

1) اعط جدول تغيرات f على $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) بين ان f تقابل من المجال $\left[\frac{-\pi}{2};0\right]$ نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

4) أ. بين أن المعادلة $f(x)=1-x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$.

ب. بين أن $\alpha=\arctan\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$.

تقديم : ذ.العربي الوظيفي

التمريـــن 25:

1) اعط جدول تغيرات الدالة f حيث $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $g(x)=2\sin x+\tan x-3x$.

أ.بين أن g قابلة للإشتقاق على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ وأن $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right):g'(x)=\frac{f(\cos x)}{\cos^2 x}$.

ب.بين أن : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right):2\sin x+\tan x\succ 3x$

ج.استنتج أن $(\forall x\in R^*):0\prec\frac{\arctan x}{x}\prec\frac{1}{3}\left(\frac{2+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

التمريـــن 26:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

1) بين أن : $(\forall x\in R):0\prec f(x)\prec\frac{\pi}{2}$

2) ليكن x عددا حقيقيا. بين أن : $1-\tan^2(f(x))=2x\tan f(x)$ ثم استنتج أن $x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)$.

3)استنتج أن $(\forall x\in R):\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan x$

التمريـــن 27:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sin(x)+\frac{1}{\sin x}$

1) اعط جدول تغيرات f على $]0;\pi[$.

2) بين ان f تقابل من المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$.

3) بين أن $\sin x\prec x$ لكل x من $]0;\pi[$.

4) أ)بين أن المعادلة $f(x)=2x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

ب)أثبت أن $\alpha=\arctan\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{1-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)^2}}$

التمريـــن 28:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{x^3+\frac{1}{x^3}}$

1) اعط جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده .

3) حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

4) بين أن المعادلة $f(x)=x^3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]1;\sqrt[3]{2}\right[$.

التمريـــن 29:

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{x^2-1}\right) \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt[6]{x-1}} \quad ، \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x+7}-3}{\sqrt[4]{2-x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[4]{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[4]{x^4+1}\right) \quad ، \quad \lim_{x\to+1}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x} \quad \lim_{x\to1^-}\frac{2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1} \quad \lim_{x\to0}\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x} \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[4]{x^4+3}}{x}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \quad ، \quad \lim_{x\to3^+}(x-3)\arctan\frac{1}{x-3} \quad ، \quad \lim_{1}\frac{Arc\tan(x^2-x)}{\sin(x-1)} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{1}{(x^2-1)Arc\tan\frac{2}{x^2-1}} \quad ، \quad \lim_{1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-mx \quad \lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x+11}-\sqrt{2x-1}-2}$$

التمريـــن 30:

حل في R كلا من المعادلات التالية :

$$E_1 : \quad 2x\sqrt{x}-\frac{3x}{\sqrt[4]{x}}=20 \quad ، \quad E_2 : \sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{3-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{2x}$$

$$E_3 : \frac{\sqrt[3]{x+3}}{3}+\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^2}}=3.\sqrt[3]{x} \quad ، \quad E_4 : \sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[6]{64-x^2}$$

التمريـــن 31:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)$

1) بين أن الدالة f متصلة على $]2,+\infty[$.
2) بين أن الدالة f تناقصية على $]2,+\infty[$.
3) استنتج أن الدالة f تقابل من $]2,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده .
4) ادرس اتصال الدالة f^{-1} على حيز تعريفها .
5) ضع جدول تغيرات الدالة f^{-1} .
6) احسب : $f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم $f^{-1}(x)$ لكل x من J

http://www.vrac-coloriages.net

التمريـــن 32:

نعتبر دالة عددية f متصلة على $[0;1]$ و $f(0)=f(1)$.

ليكن n عددا طبيعيا حيث $n\geq2$.

لتكن f_n الدالة العددية المعرفة على $\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$ بما يلي : $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$.

احسب $\sum_{k=0}^{n-1}f_n\left(\frac{k}{n}\right)$. بين أن : $(\exists x_0\in]0,1[);\ f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)$

التمريـــن 33:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x-1-\sqrt{x^2-1} & , x \geq 1 \\ f(x) = Arc\tan\left(1-x^2\right) & , x \prec 1 \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) احسب : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

3) ادرس اتصال الدالة f في 1 على اليسار .

4) بين أن الدالة f تزايدية على $]-\infty,0]$.

5) ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty,0]$

أثبت أن h تقابل من $]-\infty,0]$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

عبر عن $h^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من المجال J.

التمريـــن 34:

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) ادرس زوجية f .

2) دون استعمال الدالة المشتقة حدد رتابة f على R .

3) بين ان f تقابل من R نحو مجال J .

4) حدد f^{-1} ثم استنتج ان : $\forall x \in R, f(x) = \dfrac{Arc\tan x}{2}$

التمريـــن 35:

لتكن f دالة عددية متصلة وموجبة على R^+ بحيث : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$.

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في R^+ .

التمريـــن 36:

لتكن f دالة عددية متصلة وتزايدية قطعا على مجال $I = [a,b]$ حيث : $f(a) = 0$.

ليكن α عنصرا من $[0;1]$.

1) بين ان $(\forall x \in I)(\exists! y \in I): f(y) = \alpha f(x)$.

2) نعتبر التطبيق φ_α المعرف من I نحو I بما يلي : $\varphi_\alpha(x) = y$ حيث $f(y) = \alpha f(x)$.

أ.بين أن : $(\forall x \in I) : \varphi_\alpha(x) \leq x$

ب.نفترض أن $0 \leq \alpha \prec 1$. بين أن $(\forall x \in I) : \varphi_\alpha(x) = x \Leftrightarrow x = a$.

3) بين أن φ_α دالة متصلة على I .

التمريـــن 37:

لتكن f و g دالتين عددين معرفتين من $[0;1]$ نحو $[0;1]$ ومتصلتين على $[0;1]$.

نفترض أن : $(\forall x \in [0;1]) : f \circ g(x) = g \circ f(x)$. بين ان : $(\exists \alpha \in [0,1])\ ;\ f(\alpha) = g(\alpha)$.

التمريـــن 38:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{a^2x^2}{x^3-a^3}$ بحيث a عدد حقيقي .

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن f متصلة على D .

3) حدد a بحيث تقبل f تمديدا بالإتصال في 2 ؟

التمريـــن 39:

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم اعط جدول تغيراتها .

2) بين ان f تقابل من D نحو مجال J يتم تحديده .

3) بين أن $(\forall x \in J) :\ f^{-1}(x) = x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

التمريـــن 40:

نعتبر دالة عددية f معرفة على $[0;1]$ حيث $f(0) \prec 0 \prec f(1)$.

نفترض أنه توجد دالة عددية g متصلة على $[0;1]$ بحيث $f+g$ تزايدية على $[0;1]$.

أثبت وجود عنصر x_0 من $[0;1]$ حيث $f(x_0) = 0$.

التمريـــن 41:

لتكن f دالة متصلة على القطعة $[0;1]$.

بين أن $(\exists c \in]0;1[) :\ f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$

التمريـــن 42:

نعتبر الدالة العددية المعرفة على R بما يلي $f(x) = \arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$

1) بين أن $(\forall x \in R)\left(\exists! \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) :\ x^2 = \tan\alpha$

2) نضع $x^2 = \tan\alpha$ حيث α من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3) بين أن $f(x) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)$.

4) استنتج تعبيرا مبسطا للدالة f .

التمريـــن 43:

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x^2-1}{2x}$

1) بين أن $f(x)=\pi-2\arctan x$ لكل x من $[1;+\infty[$.

2) بين أن f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.

3) حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

التمريـــن 44:

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=\left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)^3+1$.

1) بين أن f تقابل من $]-\infty;1]$ نحو مجال J يتم تحديده.

2) حدد $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J .

التمريـــن 45:

1) بين أن $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

2) ليكن x عنصرا من $R-\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}/k\in Z\right\}$

اكتب $\tan 4x$ بدلالة $\tan x$.

3) استنتج أن : $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$

تقديم : ذ.العربي الوظيفي
wadiiifi@hotmail.com